UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01195931 9

I

RÉALISATION ET USAGE

DES

FORMES IMAGINAIRES

EN GÉOMÉTRIE.

Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. IX et X (1890-91).

RÉALISATION ET USAGE

DES

FORMES IMAGINAIRES

EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES AU COLLÈGE STANISLAS, A SAINTE-BARBE,
A L'ÉCOLE SAINTE-GENEVIÈVE ET A L'ÉCOLE MONGE,

PAR

M. MAXIMILIEN MARIE,
RÉPÉTITEUR DE MÉCANIQUE,
ANCIEN EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

(Tous droits réservés.)

QA
422
M37

RÉALISATION ET USAGE

DES

FORMES IMAGINAIRES

EN GÉOMÉTRIE.

GÉOMETRIE PLANE.

GÉNÉRALITÉS.

1. *Est-il possible de faire représenter un point du plan des axes par une solution*

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

d'une équation

$$f(x, y) = 0,$$

sous la condition que le point représentatif de cette solution, dont les coordonnées x_1 et y_1 seraient des fonctions de α, β, α', β', conserve une position invariable dans le plan, quelque transformation que l'on fasse subir aux axes et, par suite, à la solution considérée?

Et d'abord, si x_1 doit être fourni par la formule

$$x_1 = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta'),$$

il faudra que y_1 le soit par

$$y_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta):$$

sans quoi l'échange des deux axes des x et des y ne laisserait pas le point (x_1, y_1) à la même place.

Supposons donc que les formules

$$x_1 = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') \qquad \text{et} \qquad y_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta)$$

remplissent la condition exigée.

Si l'on transporte l'origine sur l'axe des x à une distance a de l'ancienne, les formules de transformation seront

$$x' = x - a, \qquad y' = y,$$

de sorte que la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

deviendra

$$x' = \alpha - a + \beta\sqrt{-1}, \qquad y' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1};$$

le point (x'_1, y'_1) deviendrait donc

$$x'_1 = \varphi(\alpha - a, \beta, \alpha', \beta'), \qquad y'_1 = \varphi(\alpha', \beta', \alpha - a, \beta);$$

pour qu'il ait conservé la même situation, il faudra que ses coordonnées x'_1, y'_1 soient liées à x_1, y_1 par les formules de transformation, c'est-à-dire que l'on ait

$$\varphi(\alpha - a, \beta, \alpha', \beta') = \varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') - a$$

et

$$\varphi(\alpha', \beta', \alpha - a, \beta) = \varphi(\alpha', \beta', \alpha, \beta),$$

quels que soient α, β, α', β' et a.

Ces conditions exigent évidemment, d'abord, que α n'entre pas dans la fonction φ relative à y_1 ni, par conséquent, α' dans la fonction φ relative à x_1; en second lieu, que la fonction φ relative à x_1 ne contienne α qu'au premier degré, sans coefficient, et de même, que la fonction φ relative à y_1 ne contienne α' qu'au premier degré, sans coefficient.

Ainsi la transformation considérée conduit à conclure

que x_1 et y_1 doivent respectivement affecter les formes

$$x_1 = \alpha + \psi(\beta, \beta')$$
$$y_1 = \alpha' + \psi(\beta', \beta).$$

Considérons maintenant la transformation dans laquelle l'axe des y aurait simplement tourné autour de l'origine, de manière à faire avec l'axe des x, resté fixe, l'angle supplémentaire de celui qu'il faisait auparavant.

Les formules de transformation seront

$$y' = y \qquad \text{et} \qquad x' = x + 2\cos\theta y;$$

la solution $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ deviendra donc

$$y' = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}.$$
$$x' = \alpha - \beta\sqrt{-1} + 2\cos\theta(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}).$$

Le point représentatif de la solution transformée serait donc

$$x'_1 = \alpha + 2\alpha'\cos\theta + \psi(\beta - 2\beta'\cos\theta, \beta')$$
$$y'_1 = \alpha' + \psi(\beta', \beta + 2\beta'\cos\theta);$$

mais, pour que le point représenté soit resté le même, il faudra que ses coordonnées x'_1, y'_1 et x_1, y_1 soient liées par les formules de transformation, c'est-à-dire que

$$y'_1 = y_1 \qquad \text{et} \qquad x'_1 = x_1 + 2y_1\cos\theta$$

ou que

$$\alpha' + \psi(\beta', \beta + 2\beta'\cos\theta) = \alpha' + \psi(\beta', \beta)$$

et

$$\alpha + 2\alpha'\cos\theta + \psi(\beta + 2\beta'\cos\theta, \beta')$$
$$= \alpha + \psi(\beta, \beta') + 2\cos\theta[\alpha' + \psi(\beta', \beta)].$$

La première condition montre que la fonction ψ relative à y_1 ne doit pas contenir β et, par suite, que la fonction ψ relative à x_1 ne doit pas non plus contenir β'.

En conséquence, il faudra réduire x_1 et y_1 à

$$x_1 = \alpha + \chi(\beta) \qquad \text{et} \qquad y_1 = \alpha' + \chi(\beta').$$

Mais alors la condition

$$x'_1 = x_1 + 2y_1 \cos\theta$$

se réduit à

$$\begin{aligned} &\alpha + 2\alpha' \cos\theta + \psi(\beta + 2\beta' \cos\theta) \\ &\quad = \alpha + \psi(\beta) + 2\cos\theta[\alpha' + \psi(\beta')] \end{aligned}$$

ou

$$\psi(\beta + 2\beta' \cos\theta) = \psi(\beta) + 2\cos\theta\,\psi(\beta'),$$

ce qui exige que ψ soit du premier degré et sans constante.

En résumé, on est amené à faire obligatoirement

$$x_1 = \alpha + k\beta, \qquad y_1 = \alpha' + k\beta'.$$

Il est, du reste, facile de vérifier que, dans ces conditions, le point représentatif d'une solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

restera toujours le même, quelque transformation des coordonnées qui intervienne.

En effet, si les formules de transformation sont

$$\begin{aligned} x' &= a + mx + ny, \\ y' &= b + px + qy, \end{aligned}$$

la solution transformée de

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ y &= \alpha' + \beta'\sqrt{-1} \end{aligned}$$

sera

$$\begin{aligned} x' &= a + m\alpha + n\alpha' + (m\beta + n\beta')\sqrt{-1}, \\ y' &= b + p\alpha + q\alpha' + (p\beta + q\beta')\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

les points représentatifs de ces deux solutions seront donc

$$x_1 = \alpha + k\beta, \qquad y_1 = \alpha' + k\beta'$$

et

$$\begin{aligned} x'_1 &= a + m\alpha + n\alpha' + k(m\beta + n\beta') = a + mx_1 + ny_1, \\ y'_1 &= b + p\alpha + q\alpha' + k(p\beta + q\beta') = b + px_1 + qy_1; \end{aligned}$$

les coordonnées anciennes et nouvelles de ces deux points seront donc liées entre elles par les formules de transformation : les deux points coïncideront donc.

Il n'y aurait aucun avantage à donner à k une valeur différente de 1; nous ferons donc toujours

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

2. Les solutions imaginaires $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ d'une équation à deux variables $f(x, y) = 0$ présentent une double indétermination, c'est-à-dire que les quatre variables α, β, α', β' ne sont liées entre elles que par deux conditions, celles dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0.$$

Il en résulte que les points (x_1, y_1) représentatifs de toutes les solutions imaginaires d'une équation $f(x, y) = 0$ formeront plaque sur le tableau.

Sur la surface recouverte par ces points (x_1, y_1), on pourra tracer une infinité de courbes : l'une d'elles sera définie par une équation complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0.$$

La théorie donnera les moyens de les étudier toutes, mais la classe de celles dont les points correspondraient à des solutions qui pussent être rendues réelles, en même temps, par rapport à l'une des variables, x par exemple, par une transformation convenable des coordonnées, présentera un intérêt tout particulier, parce que ces courbes auront des rapports beaucoup plus intimes que toutes les autres avec la courbe réelle représentée par la même équation $f(x, y) = 0$: en effet, dans un système convenable de coordonnées, les ordonnées de l'une de ces courbes et de la courbe réelle seront

respectivement représentées par deux fonctions conjointes de l'abscisse commune

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)}$$

et

$$y = \varphi(x) \mp \sqrt{-\psi(x)},$$

analogie algébrique d'où résulteront une infinité d'analogies géométriques, qui permettront d'instituer une *Géométrie comparée*.

Les lieux courbes contenus dans le lieu plan $f(x, y) = 0$ qui sont définis par la condition précédente sont désignés sous le nom de *conjuguées* du lieu réel $f(x, y) = 0$.

Cherchons la condition complémentaire qu'il faudra joindre à l'équation $f(x, y) = 0$ pour définir une des conjuguées de ce lieu, c'est-à-dire cherchons le caractère commun de toutes les solutions imaginaires de l'équation d'un lieu, qui pourraient devenir en même temps réelles par rapport à l'abscisse, à la suite d'une transformation convenable de coordonnées.

Soient

$$x = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \alpha')}{\sin\theta}$$

et

$$y = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'}{\sin\theta}$$

les formules d'une transformation : on en tire

$$\begin{aligned}&[x \sin\alpha' - y \sin(\theta - \alpha')] \sin\theta \\ &\quad = x'[\sin\alpha' \sin(\theta - \alpha) - \sin\alpha \sin(\theta - \alpha')].\end{aligned}$$

Si donc on veut que les x' soient réels, il faudra que x et y soient tels que

$$x \sin\alpha' - y \sin(\theta - \alpha')$$

soit réel, c'est-à-dire, si $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, que

$$\beta \sin \alpha' - \beta' \sin(\theta - \alpha') = 0$$

ou que

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\sin \alpha'}{\sin(\theta - \alpha')},$$

condition indépendante, comme on le voit, de l'équation du lieu considéré.

Ainsi, l'on pourra rendre en même temps réelles, par rapport à l'abscisse nouvelle, les solutions de toutes les équations à deux variables où $\frac{\beta'}{\beta}$ aurait une même valeur C.

La constante $C = \frac{\beta'}{\beta}$ qui définit une conjuguée d'un lieu $f(x, y) = 0$ est ce que nous nommerons la *caractéristique* de cette conjuguée.

On voit que cette caractéristique

$$C = \frac{\sin \alpha'}{\sin(\theta - \alpha')}$$

est le coefficient angulaire de la direction qu'il faudrait donner au nouvel axe des y pour rendre en même temps réelles les abscisses nouvelles de tous les points de la conjuguée.

Ainsi l'équation de la conjuguée C d'un lieu

$$f(x, y) = 0$$

résulterait de l'élimination de α, β, α' et β' entre les équations

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

$$\frac{\beta'}{\beta} = C$$

et

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta';$$

mais on ne se servira jamais de cette équation d'une con-

juguée en coordonnées réelles. Cette équation serait de degré $m(m-1)$ ou de degré m^2 suivant que l'équation $f(x, y) = 0$, de degré m, aurait tous ses coefficients réels ou en aurait d'imaginaires; mais la conjuguée elle-même sera bien plus facile à étudier dans l'équation $f(x, y) = 0$, qui la représente en coordonnées imaginaires, que dans celle qui la représenterait en coordonnées réelles.

Les conjuguées d'un lieu de degré m présentent, en effet, comme on le verra, tant au point de vue algébrique qu'au point de vue géométrique, tous les caractères des courbes de degré m.

Nous démontrerons d'ailleurs, et c'est, en définitive, le but que nous nous proposons, que toute question quelconque, résolue déjà pour le lieu réel $f(x, y) = 0$, l'est par cela même, au moyen des mêmes formules, pour une quelconque de ses conjuguées, moyennant une interprétation toujours très simple.

Cordes réelles d'une conjuguée. — Une équation $y = Cx + d$, dans laquelle d peut prendre toutes les valeurs réelles, n'est capable que de solutions du système C; en effet, si l'on y fait $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$, il vient

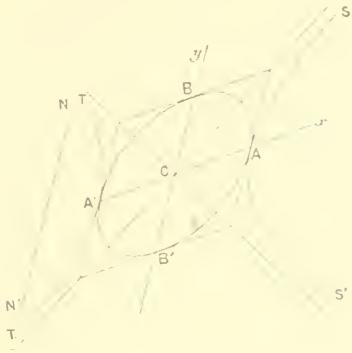
$$\alpha' = C\alpha + d \qquad \text{et} \qquad \beta' = C\beta.$$

On voit donc qu'on pourrait directement construire la conjuguée C d'un lieu $f(x, y) = 0$, en recherchant toutes les solutions communes à l'équation $f(x, y) = 0$ et à l'équation $y = Cx + d$, dans laquelle on ferait varier d de $-\infty$ à $+\infty$; au reste le point $x_1 = \alpha + \beta$, $y_1 = \alpha' + \beta'$, qui représenterait une de ces solutions, appartiendrait à la sécante considérée $y = Cx + d$, car les deux équations précédentes donnent

$$\alpha' + \beta' = C(\alpha + \beta) + d.$$

3. *Conjuguées des coniques.* — Soit C (*fig.* 1) une ellipse quelconque, cherchons la conjuguée de cette

Fig. 1.



ellipse dont les cordes réelles sont parallèles à la droite NN': pour cela rapportons la courbe au diamètre parallèle à NN', pris pour axe des y, et à son conjugué, pris pour axe des x; l'équation de l'ellipse prendra la forme

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

si l'on donne à x des valeurs non comprises entre $-a'$ et $+a'$, l'ordonnée du lieu sera imaginaire et représentée par

$$y = \frac{b'}{a'}\sqrt{x^2 - a'^2}\sqrt{-1},$$

les coordonnées réalisées du point correspondant seront

$$x_1 = x \qquad \text{et} \qquad y_1 = \frac{b'}{a'}\sqrt{x_1^2 - a'^2};$$

elles seront donc liées entre elles par la relation

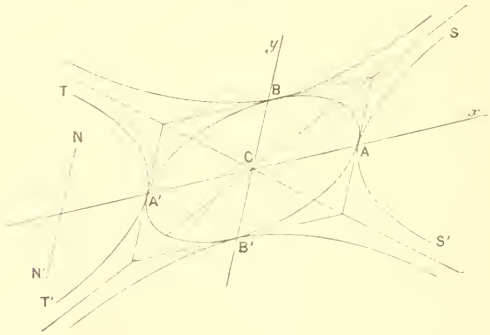
$$\frac{x_1^2}{a'^2} - \frac{y_1^2}{b'^2} - 1 = 0;$$

la conjuguée lieu de ces points sera donc l'hyperbole SAS'TA'T' ayant pour diamètre non transverse le diamètre de l'ellipse parallèle aux cordes réelles de cette même conjuguée, et pour diamètre transverse le diamètre conjugué du premier.

Ainsi les conjuguées d'une ellipse sont toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun; elles recouvrent tout le plan, sauf l'intérieur de l'ellipse, et cette ellipse est l'enveloppe de ses conjuguées. Nous savions déjà qu'il en est de même de toutes les courbes : une courbe quelconque est l'enveloppe de ses conjuguées, ou d'une partie de ses conjuguées.

Considérons maintenant une hyperbole (*fig.* 2) : les

Fig. 2.



parallèles à un rayon compris dans les angles des deux asymptotes qui comprennent eux-mêmes la courbe réelle rencontreraient toutes cette courbe en deux points réels; ainsi les cordes réelles des conjuguées d'une hyperbole sont parallèles aux diamètres non transverses de cette courbe; en d'autres termes, quels que soient les axes auxquels une hyperbole soit rapportée, la caractéris-

tique $C = \frac{\xi}{\eta}$ d'une conjuguée ne peut varier qu'entre les valeurs extrêmes des coefficients angulaires des diamètres non transverses de la courbe. C'est un fait général en ce sens que, si une courbe de degré m est toujours coupée en m points réels par toutes les droites parallèles aux rayons d'un secteur, la courbe n'a pas de conjuguée dont la caractéristique soit comprise entre les coefficients angulaires des rayons extrêmes de ce secteur, et ces rayons extrêmes ont généralement des directions asymptotiques, parce que, généralement, on peut mener à la courbe plus de tangentes inclinées à une asymptote dans un sens, qu'on n'en peut mener qui soient inclinées dans le sens contraire. Au reste, cela ne veut pas dire qu'une courbe n'ait jamais de conjuguées dont les cordes réelles aient des directions parallèlement auxquelles on ne pourrait pas lui mener de tangentes.

Supposons que nous voulions connaître la conjuguée de l'hyperbole SAS'TA'T', dont les cordes réelles seraient parallèles à une droite NN' parallèle à un diamètre BB' non transverse de cette hyperbole ; prenons pour axe des y ce diamètre BB' et son conjugué AA' pour axe des x, l'équation de l'hyperbole prendra la forme

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0,$$

et si l'on donne à x des valeurs comprises entre $-a'$ et $+a'$, y sera imaginaire et représenté par

$$y = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x^2}\sqrt{-1}.$$

les coordonnées réalisées du point correspondant seront

$$x_1 = x \qquad \text{et} \qquad y_1 = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x_1^2}.$$

elles seront donc liées entre elles par la relation

$$\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} - 1 = 0;$$

la conjuguée lieu de ces points sera donc l'ellipse B A B′ A′, ayant pour diamètres les deux diamètres de l'hyperbole considérée, qui seraient parallèles, l'un aux cordes réelles de la conjuguée, et l'autre au diamètre conjugué du premier.

Ainsi, les conjuguées d'une hyperbole sont toutes les ellipses qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun. Elles ont deux enveloppes, l'une réelle, c'est l'hyperbole proposée, l'autre imaginaire, qui est l'hyperbole de mêmes axes, mais changés de réel en imaginaire, et réciproquement. Cette seconde enveloppe est ordinairement désignée sous le nom d'*hyperbole conjuguée de la première;* mais nous l'appellerons plutôt *supplémentaire de la proposée,* parce que, lorsque les conjuguées d'une courbe ont deux enveloppes, l'enveloppe imaginaire présente toujours tous les caractères d'une véritable supplémentaire de la courbe elle-même ou de l'enveloppe réelle.

Les deux enveloppes ont ici les mêmes asymptotes, c'est un fait qui sera généralisé.

Les conjuguées d'une hyperbole recouvrent toute la portion du plan comprise entre cette hyperbole et sa supplémentaire, et aucune ne peut pénétrer dans l'intérieur de la concavité de l'une ou de l'autre des deux hyperboles.

Les points de l'enveloppe imaginaire, ou de l'hyperbole supplémentaire, seraient fournis par les solutions imaginaires sans parties réelles de l'équation de l'hyperbole proposée, rapportée à deux de ses diamètres conjugués quelconques a et b.

En effet, si dans l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

on fait

$$x = \beta\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad y = \beta'\sqrt{-1},$$

il vient

$$\frac{\beta^2}{a^2} - \frac{\beta'^2}{b^2} + 1 = 0;$$

les coordonnées réalisées du point correspondant sont

$$x_1 = \beta, \qquad y_1 = \beta',$$

et elles sont liées par l'équation

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} + 1 = 0,$$

qui représente bien l'hyperbole supplémentaire.

Le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ du lieu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, en un point de l'enveloppe imaginaire, se réduit ici à $\frac{d\beta'}{d\beta}$ et est, par conséquent, réel. Nous verrons bientôt que c'est le caractère général de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu quelconque.

Lorsque la caractéristique d'une conjuguée d'une hyperbole tend vers le coefficient angulaire d'une des asymptotes, la conjuguée correspondante s'aplatit indéfiniment et, à la limite, se confond avec l'asymptote elle-même, qu'elle recouvre deux fois. Nous verrons plus tard que le fait est général et même que les conjuguées d'une courbe de degré quelconque tendent, dans une de leurs parties, à devenir des ellipses, lorsque leur caractéristique tend vers le coefficient angulaire d'une asymptote réelle.

On verrait, comme précédemment, que les conjuguées d'une parabole sont des paraboles égales à la proposée

et opposées à elle par un diamètre commun et une tangente commune.

Les conjuguées d'une ellipse imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

sont toutes les hyperboles qui ont avec l'ellipse réelle correspondante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

un système de diamètres conjugués commun. Seulement, c'est alors le diamètre transverse de la conjuguée qui est parallèle à ses cordes réelles.

L'enveloppe imaginaire de ces conjuguées est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elle est fournie par les solutions imaginaires, sans parties réelles, de l'équation du lieu lui-même,

$$\frac{x_2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

c'est-à-dire par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \beta'\sqrt{-1},$$

réalisées par

$$x_1 = \beta, \qquad y_1 = \beta'.$$

En un quelconque des points de cette enveloppe imaginaire, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ du lieu est réel.

Les conjuguées de l'ellipse évanouissante

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

sont naturellement réduites à leurs asymptotes, c'est-à-dire sont des droites. Les conjuguées dont les cordes

réelles sont parallèles à une droite donnée sont les diagonales du parallélogramme construit sur les deux diamètres conjugués d'une ellipse homothétique à l'ellipse évanouissante, dont l'un serait parallèle aux cordes réelles de cette conjuguée.

4. *Des éléments d'un lieu en un de ses points et de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu.* — Le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ en un point x, y d'un lieu

$$f(X, Y) = 0$$

est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)};$$

ce rapport n'a qu'une valeur, quel que soit dx, c'est-à-dire que si l'on donne à x l'accroissement

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$

l'accroissement correspondant de y,

$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1},$$

sera toujours lié à l'accroissement de x par la même relation

$$d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1} = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}(d\alpha + d\beta\sqrt{-1}),$$

quels que soient $d\alpha$ et $d\beta$ l'un par rapport à l'autre.

Soit $m + n\sqrt{-1}$ la valeur du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ au point x, y, les accroissements correspondants de x et de y seront donc liés l'un à l'autre par la relation

$$d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1} = (m + n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

qui se décompose en deux

$$d\alpha' = m\,d\alpha - n\,d\beta,$$

et

$$d\beta' = m\,d\beta + n\,d\alpha.$$

Soient, suivant notre notation habituelle, x_1 et y_1 les coordonnées du point représentatif de la solution, x, y, $y_1 + dx_1$ et $y_1 + dy_1$ celles d'un point infiniment voisin, de sorte que

$$dx_1 = d\alpha - d\beta \qquad \text{et} \qquad dy_1 = d\alpha' + d\beta';$$

les deux équations précédentes donnent

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{d\alpha' - d\beta'}{d\alpha - d\beta} = \frac{(m-n)\,d\alpha + (m-n)\,d\beta}{d\alpha - d\beta}$$

ou

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{m+n+(m-n)\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{1+\dfrac{d\beta}{d\alpha}}.$$

$\frac{dy_1}{dx_1}$ pourra donc prendre habituellement une infinité de valeurs, qui dépendront de $\frac{d\beta}{d\alpha}$; c'est-à-dire qu'autour du point x_1, y_1, qui correspond à la solution x, y de l'équation $f(X, Y) = 0$, le lieu en présentera généralement une infinité d'autres, placés dans toutes les directions, ce qui est tout naturel, puisque ce lieu constitue une surface. Les lignes droites qui joindraient le point $[x_1, y_1]$ aux points $[x_1 + dx_1, y_1 + dy_1]$ constituent les éléments du lieu au point $[x_1, y_1]$.

Pour que tous ces éléments se confondissent géométriquement, il faudrait que $\frac{dy_1}{dx_1}$ fût indépendant de $\frac{d\beta}{d\alpha}$, ce qui exigerait que

$$\frac{m+n}{1} = \frac{m-n}{1}$$

ou que $n = 0$.

Ainsi, aux points d'un lieu où $\frac{dy}{dx}$ est réel, tous les éléments de ce lieu se confondent, c'est-à-dire que toutes les courbes, lieux de points $[x_1, y_1]$, qui y passent, s'y touchent.

C'est là la propriété caractéristique de la limite, réelle ou imaginaire, de la portion du plan recouverte par tous les points imaginaires réalisés d'un lieu quelconque ; les deux enveloppes réelle et imaginaire des conjuguées d'un lieu quelconque seront donc fournies simultanément par la condition commune :

$$\frac{dy}{dx} = \text{réel}.$$

Nous allons donner deux exemples d'une telle recherche. Soit d'abord le lieu

$$y^3 - a^2 y + a^2 x = 0,$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{3y^2 - a^2};$$

pour que $\frac{dy}{dx}$ soit réel, il faut que y soit de la forme $\beta'\sqrt{-1}$; alors x sera de la forme $\beta\sqrt{-1}$. D'ailleurs, ces valeurs de x et y devant satisfaire à l'équation du lieu, on aura

$$-\beta'^3 - a^2\beta' + a^2\beta = 0 ;$$

l'équation de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu est donc

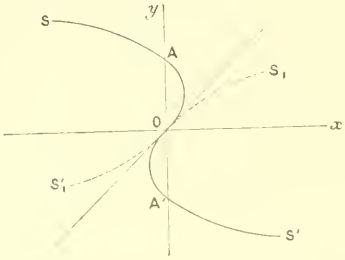
$$y^3 - a^2 y - a^2 x = 0.$$

La courbe réelle, ou l'enveloppe réelle des conjuguées du lieu, est SAOA'S' (*fig.* 3), et l'enveloppe imaginaire est $S_1OS'_1$. Ces deux enveloppes se touchent à l'origine, qui est pour elles deux un point d'inflexion, et elles sont réciproques.

Nous verrons plus tard qu'il en est toujours ainsi :

les deux enveloppes sont toujours réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que chacune d'elles est l'enveloppe

Fig. 3.



imaginaire des conjuguées de l'autre, et les deux courbes ont les mêmes points d'inflexion, où d'ailleurs elles se tournent leurs convexités.

Considérons, comme second exemple, le lieu représenté par l'équation

$$(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2=(r+r'\sqrt{-1})^2,$$

qui se présentera de lui-même dans la théorie des courbures et auquel nous donnons le nom de *cercle imaginaire*.

Soient $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ et $y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$ les coordonnées imaginaires d'un point du lieu, α, β, α' et β' satisferont aux deux conditions

$$(1)\quad (\alpha-a)^2-(\beta-b)^2+(\alpha'-a')^2-(\beta'-b')^2=r^2-r'^2$$

et

$$(2)\qquad (\alpha-a)(\beta-b)+(\alpha'-a')(\beta'-b')=rr';$$

le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ aura pour valeur en ce point

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-a-b\sqrt{-1}}{y-a'-b'\sqrt{-1}}=-\frac{\alpha-a+(\beta-b)\sqrt{-1}}{\alpha'-a'+(\beta'-b')\sqrt{-1}},$$

et, pour qu'il soit réel, il faudra que

$$(3) \qquad \frac{\alpha - a}{\alpha - a'} = \frac{\beta - b}{\beta' - b'}.$$

L'équation (3) donne

$$\beta - b = \frac{\alpha - a}{\alpha - a'}(\beta' - b');$$

en substituant dans les deux autres, il vient

$$(1\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha - a)^2 - \frac{(\alpha - a)^2}{(\alpha' - a')^2}(\beta' - b')^2 \\ &\qquad - (\alpha' - a')^2 - (\beta' - b')^2 = r^2 - r'^2 \end{aligned} \right.$$

ou

$$(1\ ter) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha - a)^2 - (\alpha' - a')^2 \\ &\quad - (\beta' - b')^2 \frac{(\alpha - a)^2 - (\alpha' - a')^2}{(\alpha' - a')^2} = r^2 - r'^2 \end{aligned} \right.$$

et

$$(2\ bis) \qquad \left[\frac{(\alpha - a)^2}{\alpha' - a'} + (\alpha' - a')\right](\beta' - b') = rr'$$

ou

$$(2\ ter) \qquad (\beta' - b') = \frac{rr'(\alpha' - a')}{(\alpha - a)^2 - (\alpha' - a')^2};$$

éliminant maintenant $\beta' - b'$, il vient

$$(4) \qquad (\alpha - a)^2 - (\alpha' - a')^2 - \frac{r^2 r'^2}{(\alpha - a)^2 - (\alpha' - a')^2} = r^2 - r'^2,$$

c'est-à-dire

$$(4\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} &[(\alpha - a)^2 - (\alpha' - a')^2]^2 \\ &\quad - (r^2 - r'^2)[(\alpha - a)^2 - (\alpha' - a')^2] - r^2 r'^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

équation qui donne

$$(4\ ter) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha^2 - a)^2 + (\alpha' - a')^2 \\ &\quad = \frac{r^2 - r'^2 \pm \sqrt{(r^2 - r'^2)^2 + 4 r^2 r'^2}}{2} = r^2 \quad \text{ou} \quad -r'^2 \end{aligned} \right.$$

mais $(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2$ ne saurait être négatif; par conséquent, en définitive, la solution est

$$(4\ quater) \qquad (\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2 = r^2,$$

c'est-à-dire que α et α' sont les coordonnées d'un point de la circonférence

$$(5) \qquad (x - a)^2 + (y - a')^2 = r^2.$$

L'équation (1) donne, par suite,

$$(6) \qquad (\beta - b)^2 + (\beta' - b')^2 = r'^2,$$

et, par conséquent, β et β' sont les coordonnées d'un point du cercle

$$(x - b)^2 + (y - b')^2 = r'^2;$$

mais l'équation (3)

$$\frac{\alpha - a}{\alpha' - a'} = \frac{\beta - b}{\beta' - b'}$$

montre que les rayons des deux circonférences (5) et (6), qui contiendront respectivement les points (α, α') et (β, β') seront parallèles.

Il en résulte que l'enveloppe imaginaire du lieu proposé est la circonférence du cercle

$$(x - a - b)^2 + (y - a' - b')^2 = (r + r')^2.$$

En effet, soient, par rapport aux axes Ox et Oy (*fig.* 4), C et C′ les points dont les coordonnées sont a et a' pour le premier, b et b' pour le second; CA et CB, deux rayons parallèles des deux circonférences décrites de C et de C′ comme centres, avec r et r' pour rayons; les projections de CA et de C′B sur Ox seront respectivement

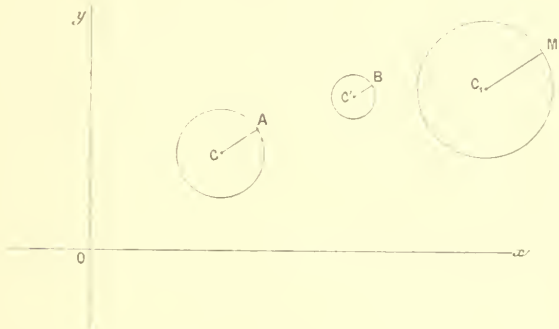
$$\alpha - a \quad \text{et} \quad \beta - b.$$

et leurs projections sur Oy seront

$$\alpha' - a' \quad \text{et} \quad \beta' - b';$$

en conséquence, si l'on construit le point C_1, dont les coordonnées soient $a + b$ et $a' + b'$, et qu'autour du

Fig. 4.



point C_1 on décrive une circonférence de rayon $r - r'$, cette circonférence sera le lieu cherché.

En effet, les coordonnées d'un point M de cette circonférence seront

$$x_1 = a + b + \alpha - a - \beta - b = \alpha - \beta$$

et

$$y_1 = a' + b' + \alpha' - a' - \beta' - b' = \alpha' - \beta'.$$

5. *De la ligne droite.* — Les conjuguées d'une ellipse étant toutes les hyperboles qui ont avec elle un système de diamètres conjugués commun, les conjuguées d'une ellipse évanouissante, telle que le lieu représenté par l'équation

$$(y - mx - p)^2 - (nx - q)^2 = 0.$$

seront des hyperboles réduites à leurs asymptotes; chacune de ces conjuguées sera composée des diagonales

de l'un des parallélogrammes construits sur deux diamètres conjugués d'une ellipse homothétique à la proposée, par rapport à leur centre commun, telle que

$$(y - mx - p)^2 + (nx + q)^2 = k^2.$$

Ainsi, les conjuguées du lieu

$$(y - mx - p)^2 + (nx + q)^2 = 0$$

constituent deux faisceaux de droites, émergeant l'un et l'autre du point réel

$$nx + q = 0, \qquad y - mx - p = 0,$$

où se réduit l'ellipse évanouissante.

L'un de ces faisceaux constitue le système des conjuguées du lieu

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

et l'autre, le système des conjuguées du lieu

$$y = (m - n\sqrt{-1})x + p - q\sqrt{-1}.$$

Considérons l'un de ces lieux en particulier.

On pourra toujours déterminer $m + n\sqrt{-1}$ et $p + q\sqrt{-1}$, de façon que l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

admette deux solutions imaginaires données (x', y') et (x'', y''); l'équation

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

répondrait, en effet, à la question.

Si les deux points (x', y'), (x'', y'') ont été pris sur une même conjuguée C d'un lieu $f(x, y) = 0$, la droite

de caractéristique C du lieu

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

sera une sécante effective, quoique représentée en coordonnées imaginaires, de la conjuguée C du lieu

$$f(x, y) = 0.$$

Si les deux points (x', y'), (x'', y'') tendent à se confondre sur la conjuguée C du lieu $f(x, y) = 0$, la même droite deviendra tangente à la même conjuguée. Enfin, si les deux points (x', y'), (x'', y'') s'éloignent à l'infini sur la même conjuguée C du même lieu $f(x, y) = 0$, la même droite deviendra asymptote à cette conjuguée.

On voit par là que la forme imaginaire sous laquelle sont représentées les droites d'un faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

ne s'opposera aucunement à la solution des questions relatives aux tangentes et aux asymptotes, aux courbes représentées elles-mêmes en coordonnées imaginaires.

Au contraire, il est clair qu'il fallait bien qu'une droite fût imaginairement représentée pour pouvoir entrer analytiquement en concurrence avec une courbe représentée elle-même imaginairement.

L'important était de constater que l'équation

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

contient juste le nombre de constantes arbitraires suffisant, sans superfétation, pour permettre d'établir tel concours que l'on voudrait entre une droite du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

et une conjuguée désignée d'un lieu donné.

Il en sera toujours de même dans toutes les recherches possibles. C'est ainsi, par exemple, que l'étude préalable des conjuguées du lieu

$$(x - a - b\sqrt{-1})^2 + (y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

se trouvera tout naturellement désignée pour présider aux recherches relatives aux courbures des conjuguées d'un lieu quelconque.

L'équation en coordonnées réelles de la conjuguée C du lieu

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

résulterait de l'élimination de α, β, α' et β' entre les équations

$$(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = (m + n\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1}) + p + q\sqrt{-1},$$

$$\beta' = C\beta,$$

$$x_1 = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad y_1 = \alpha' - \beta' :$$

c'est

$$y_1 = \left(m - n - \frac{2n^2}{m - n - C}\right)x_1 + p + q + \frac{2qn}{m - n - C};$$

mais on ne s'en sert jamais sous cette forme compliquée, par la raison que, dans les recherches théoriques sur une conjuguée désignée d'un lieu donné, on suppose toujours qu'on ait d'abord rendu réelles les abscisses des points de cette conjuguée, par un choix convenable d'axes, et que les droites imaginaires, utiles à considérer, doivent alors, nécessairement, avoir aussi leurs abscisses réelles.

Or, si l'on suppose les β nuls, $C = \frac{\beta'}{\beta}$ est alors infini, et l'équation précédente se réduit à

$$y_1 = (m + n)x_1 + p + q.$$

Lorsque le coefficient angulaire $m + n\sqrt{-1}$ d'un

faisceau de droites imaginaires devient réel, c'est-à-dire lorsque l'équation du faisceau se réduit à

$$y = mx - p + q\sqrt{-1},$$

toutes les conjuguées du faisceau se replient sur la même droite

$$y_1 = mx_1 - p - q;$$

on le vérifie aisément.

6. *Des tangentes aux courbes imaginaires.* — Si deux équations

$$f(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad f_1(X, Y) = 0$$

ont une solution commune (x, y), et que, d'ailleurs, ces deux équations fournissent pour $\frac{dy}{dx}$, en ce point, la même valeur $m + n\sqrt{-1}$, les deux lieux admettront les mêmes éléments autour du point (x_1, y_1), qui représenterait la solution commune; ils auront autour de ce point un disque élémentaire commun dont le contour sera défini par les équations

$$dy = d\alpha' - d\beta'\sqrt{-1} = (m + n\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$d\alpha' = m\,d\alpha - n\,d\beta$$

et

$$d\beta' = n\,d\alpha - m\,d\beta;$$

d'où

$$d\alpha' + d\beta' = (m + n)\,d\alpha - (m - n)\,d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{m + n + (m - n)\frac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \frac{d\beta}{d\alpha}}.$$

Si l'on considère, en particulier, les deux courbes,

définies séparément par les deux équations proposées $f(x, y) = 0$, $f_1(x, y) = 0$ et par une relation complémentaire commune, d'ailleurs arbitraire,

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

$\frac{d\beta}{d\alpha}$ aura la même valeur de part et d'autre, et les deux courbes seront tangentes.

Les deux équations

$$f(X, Y) = 0$$

et

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

remplissent les deux conditions supposées, quelle que soit la solution (x, y) de $f(X, Y) = 0$, et si, au lieu d'une condition quelconque $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, on introduit la condition

$$\frac{\beta'}{\beta} = C,$$

C désignant la caractéristique du point (x, y), d'une part, la courbe tracée sur le lieu $f(X, Y) = 0$ sera la conjuguée C de ce lieu ; d'autre part, la courbe tracée sur le lieu

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) = (m + n\sqrt{-1})(X - x)$$

sera la droite de caractéristique C du faisceau correspondant, et la droite sera tangente à la courbe.

Donc la tangente à la conjuguée d'un lieu $f(X, Y) = 0$, au point (x_1, y_1) de cette conjuguée qui correspond à la solution (x, y), est la conjuguée C du faisceau

$$Y - y = -\frac{f'_x(x, y)}{f_y(x, y)}(X - x).$$

Des tangentes menées par un point extérieur réel

à un lieu représenté par une équation algébrique, et application aux courbes du second degré. — Soient $f(X, Y) = 0$ l'équation du lieu proposé, et x_0, y_0 les coordonnées du point donné, les coordonnées x et y du point de contact inconnu seront fournies par les deux équations

$$f(x, y) = 0$$

et

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0,$$

z_0 représentant 1.

Les solutions de ces deux équations seront en nombre $m(m-1)$, si m est le degré de $f(x, y)$. Aux solutions réelles correspondront des tangentes réelles menées du point (x_0, y_0) au lieu réel.

Si les deux équations admettent les solutions imaginaires conjuguées

$$x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1},$$
$$y = \alpha' \pm \beta'\sqrt{-1},$$

le faisceau de droites que représenterait l'équation

$$X f'_x + Y f'_y + f'_z = 0$$

contiendra les deux points (x, y) et (x_0, y_0), parce que les deux égalités

$$x f'_x + y f'_y + f'_z = 0$$

et

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z = 0$$

seront satisfaites, comme étant les deux équations mêmes du problème. D'un autre côté, le point réel (x_0, y_0) sera le centre du faisceau

$$X f'_x + Y f'_y + f'_z = 0;$$

par conséquent, toutes les droites du faisceau y passeront. La droite du faisceau qui aurait pour caractéris-

tique celle $\frac{\beta'}{\beta}$ de la solution obtenue joindra donc effectivement le point (x_0, y_0) au point (x, y); mais les deux lieux

$$f(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad Xf'_x + Yf'_y + f'_z = 0$$

contiendront les mêmes éléments autour du point représentatif de la solution $(X = x, Y = y)$. Donc, enfin, la droite de caractéristique $C = \frac{\beta'}{\beta}$ du faisceau $Xf'_x + Yf'_y + f'_z = 0$ sera bien l'une des tangentes menées du point (x_0, y_0) à la conjuguée C du lieu $f(X, Y) = 0$. Comme on aura obtenu deux solutions conjuguées, on connaîtra deux tangentes menées du même point (x_0, y_0) à la même conjuguée du lieu proposé. La caractéristique C de cette conjuguée dépendra de la situation du point (x_0, y_0).

Si les deux équations

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad x_0 f'_x + y_0 f'_y - f'_z = 0$$

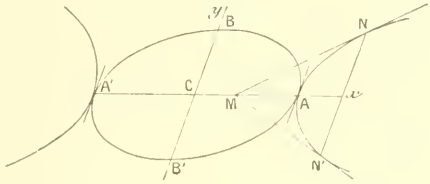
avaient d'autres solutions imaginaires, il y correspondrait généralement des tangentes à d'autres conjuguées.

Si, en particulier, $-\frac{f'_x}{f'_y}$ était réel en l'un des points imaginaires de contact et en son conjugué, ces deux points appartiendraient à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu $f(X, Y) = 0$, et l'on se trouverait avoir mené du point (x_0, y_0) deux tangentes à cette enveloppe.

Supposons qu'il s'agisse d'une ellipse réelle ABA'B' (*fig.* 5), et soit M le point donné (x_0, y_0), on sait que la polaire de ce point est parallèle au diamètre conjugué de OM et qu'elle est réelle; elle ne peut donc couper le lieu qu'en deux points de la conjuguée dont les cordes réelles lui sont parallèles, c'est-à-dire de la conjuguée

qui touche l'ellipse aux extrémités A et A′ du diamètre OM. Soit NN′ cette polaire ; les points de contact cherchés seront N et N′, et les tangentes cherchées seront MN et MN′.

Fig. 5.



Supposons en particulier que le point donné soit l'un des foyers réels de l'ellipse et que cette courbe soit rapportée à ses axes : la polaire du point $y = 0$, $x = c$ sera $x = \frac{a^2}{c}$, elle coupera l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ aux points

$$x = \frac{a^2}{c}, \qquad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-\frac{a^2 b^2}{c^2}} = \pm \frac{b^2}{c}\sqrt{-1};$$

les tangentes menées au lieu en ces deux points sont les conjuguées à abscisses réelles des deux faisceaux

$$\frac{X}{c} \pm \frac{Y}{c}\sqrt{-1} - 1 = 0$$

ou

$$Y = \mp\sqrt{-1}\,X \pm c\sqrt{-1}.$$

Ces tangentes ont donc pour équations en coordonnées réelles

$$Y = \mp X \pm c,$$

elles sont rectangulaires entre elles et elles passent géométriquement par les foyers imaginaires de l'ellipse

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \pm c;$$

d'ailleurs leurs équations en coordonnées imaginaires sont satisfaites par $x = 0$ avec $y = \pm c\sqrt{-1}$. C'est pour cela que le calcul donne les deux foyers imaginaires.

Les quatre tangentes menées à l'ellipse des deux foyers réels F et F′ forment un carré dont les autres sommets sont les foyers imaginaires φ et φ'. Les tangentes menées des points φ et φ' considérés comme imaginaires coïncideraient avec les tangentes menées des points F et F′ réels.

Le carré $F'\varphi F\varphi'$ est géométriquement et analytiquement inscrit à la conique.

Si l'on rapportait l'ellipse à deux de ses diamètres conjugués a' et b' et que, en supposant $a' > b'$, on prît sur le diamètre a' le point situé à une distance du centre égale à $c' = \sqrt{a'^2 - b'^2}$, on arriverait à des conclusions analogues; seulement, au lieu d'un carré inscrit dans la conique, on trouverait un parallélogramme ayant ses diagonales égales; les quatre sommets seraient des simili-foyers.

Si l'on faisait varier le système des diamètres conjugués, les quatre simili-foyers décriraient un lieu sur lequel ils se réuniraient à l'origine lorsque les diamètres conjugués viendraient se confondre avec ceux qui sont égaux; à ce moment, les quatre tangentes deviendraient géométriquement indéterminées; elles seraient bien représentées, par rapport aux axes, par exemple, par l'équation complètement déterminée

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-1}\,x,$$

mais toutes les conjuguées de ce lieu répondraient à la question, parce qu'elles contiendraient toutes le point donné (x_0, y_0), transporté à l'origine. L'ensemble de

ces conjuguées serait constitué par l'ensemble des asymptotes de toutes les hyperboles conjuguées de l'ellipse.

Nous verrons bientôt qu'il en est de même pour tous les lieux algébriques : si, en cherchant les asymptotes d'une courbe $f(x, y) = 0$, on en a trouvé une imaginaire

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

en réalité, on a trouvé un faisceau d'asymptotes à toutes les conjuguées du lieu proposé.

Si le point (x_0, y_0), par lequel on voulait mener des tangentes à un lieu $f(x, y) = 0$, était imaginaire, les $m(m-1)$ tangentes trouvées appartiendraient à des conjuguées non désignées d'avance et d'ailleurs ne passeraient généralement plus par le point (x_0, y_0) réalisé. Ce cas ne présente aucun intérêt pratique.

7. *Quelques propriétés de l'enveloppe imaginaire.* — Si l'on propose de mener à un lieu de degré m, $f(x, y) = 0$, des tangentes parallèles à une direction réelle donnée, $y = kx$, les points de contact appartiendront soit à la courbe réelle, soit à l'enveloppe imaginaire des conjuguées. Le nombre total de ces tangentes sera $m(m-1)$, puisque les équations du problème seront

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad -\frac{f_x}{f_y} = k.$$

Il en résulte que, si l'une des enveloppes n'a que p tangentes parallèles à une direction donnée, l'autre en a $m(m-1) - p$. A ce point de vue, *les deux enveloppes sont supplémentaires.*

Si $y = mX + \varphi(m)$ est l'équation générale des tangentes à la courbe réelle représentée par une équation, $f(X, Y) = 0$, $Y = (m + n\sqrt{-1})X + \varphi(m + n\sqrt{-1})$

sera évidemment l'équation générale des tangentes à toutes les conjuguées. La solution double commune aux deux équations

$$f(X, Y) = 0 \quad \text{et} \quad Y = (m + n\sqrt{-1})X + \varphi(m + n\sqrt{-1})$$

représentera le point de contact et si, dans cette solution double, on a $\frac{\beta'}{\beta} = C$, la conjuguée C du faisceau

$$Y = (m + n\sqrt{-1})X + \varphi(m + n\sqrt{-1})$$

sera tangente au point en question à la conjuguée C du lieu $f(x, y) = 0$.

Aux valeurs réelles de m, pour lesquelles $\varphi(m)$ serait imaginaire, correspondront des tangentes à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu $f(X, Y) = 0$.

Si $\varphi(m)$ peut devenir imaginaire, deux de ses valeurs deviendront momentanément égales et le point de contact des deux tangentes confondues sera alors un point d'inflexion du lieu réel.

Ces deux valeurs de $\varphi(m)$ pourront, avant d'être devenues égales, être représentées par

$$\psi(m) \pm \sqrt{\chi(m)}.$$

$\chi(m)$ étant alors positif; aussitôt après, elles deviendront

$$\psi(m) \pm \sqrt{-\chi(m)}\sqrt{-1},$$

$-\chi(m)$ étant alors positif.

Les deux tangentes au lieu réel seront représentées par

$$Y = mX + \psi(m) \pm \sqrt{\chi(m)};$$

quant aux deux tangentes à l'enveloppe imaginaire,

elles le seront par

$$Y = mX + \psi(m) \pm \sqrt{-\chi(m)}\sqrt{-1}.$$

Mais cette dernière équation ne représente que la seule droite

$$Y = mX + \varphi(m) \mp \sqrt{-\chi(m)}.$$

Il résulte de là que les deux enveloppes d'un même lieu sont respectivement les enveloppes de droites représentées, pour l'une, par une équation telle que

$$Y = mX + \psi(m) \mp \sqrt{\chi(m)}$$

et, pour l'autre, par l'équation correspondante

$$Y = mX + \psi(m) \mp \sqrt{-\chi(m)}.$$

Il en résulte que *les deux enveloppes d'un même lieu sont toujours réciproques l'une de l'autre*, lorsqu'elles coexistent.

Au moment où $\chi(m)$ s'annule, le point de contact appartient à la fois aux deux enveloppes et est point d'inflexion pour l'une et pour l'autre, puisque les deux tangentes, à ce moment confondues, à l'une ou à l'autre, deviennent instantanément imaginaires pour l'une ou l'autre suivant qu'on fait varier m dans un sens ou dans l'autre, à partir de sa valeur singulière. Il en résulte que *les deux enveloppes ont toujours les mêmes points d'inflexion, qu'elles se touchent en ces points et qu'elles s'y tournent leurs convexités.*

Une asymptote réelle

$$y = mx + \varphi(m)$$

d'un lieu réel est toujours la réunion de deux tangentes à deux branches distinctes du lieu. Lorsque cette asymptote ne coupe le lieu qu'en deux points situés à l'infini, sa

direction est généralement une direction limite pour les tangentes au lieu. Si l'on essayait de faire varier dans un sens convenable la direction de la tangente, à partir de celle de l'asymptote, les deux tangentes, un instant confondues, deviendraient imaginaires et, leur coefficient angulaire étant resté réel, les points de contact appartiendraient à l'enveloppe imaginaire.

Il en résulte que les *deux enveloppes ont généralement les mêmes asymptotes.*

8. *Des asymptotes aux courbes imaginaires.* — Lorsque le coefficient du premier terme d'une équation algébrique se rapproche de zéro, l'une des racines de cette équation grandit indéfiniment; mais, en devenant infinie, elle devient indéterminée : son module devient infini, mais son argument reste indéterminé si, du moins, on ignore comment le coefficient du premier terme de l'équation considérée est lui-même parvenu à la valeur zéro; car, zéro est aussi indéterminé que l'infini, étant l'un et l'autre des nombres dont les modules ont diminué ou crû indéfiniment, leurs arguments pouvant être restés quelconques.

Supposons que deux équations algébriques

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad f_1(x, y) = 0,$$

de degrés m et n, soient telles que l'élimination, entre elles, de y conduise à une équation en x, de degré $mn - p$, on dira que p des points d'intersection des deux lieux se sont transportés à l'infini, ce qui exprimera simplement qu'il n'en est resté que $mn - p$, à distance finie; mais, en réalité, les abscisses et, par conséquent, les ordonnées des p points passés à l'infini seront devenues indéterminées : en réalité, les deux lieux auront p infinités de points communs à l'infini.

Mais, si, au lieu des lieux superficiels $f = 0$ et $f_1 = 0$, on considère spécialement, sur ces deux lieux, les deux courbes qui seraient définies par les mêmes équations auxquelles on aurait adjoint une équation complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

ces deux courbes auront seulement p points communs à l'infini.

Quant aux arguments des coordonnées de ces p points rejetés à l'infini, ils seront parfaitement déterminés.

En effet, les valeurs infinies de x et de y devront satisfaire indifféremment à l'un ou l'autre des deux systèmes

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad f_1 = 0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0,$$

ces deux systèmes admettant également les solutions infinies considérées.

Supposons qu'on les recherche dans les équations f et φ : l'équation $f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0$ se décomposera en deux autres, dont les premiers membres, pour des valeurs infinies de α, β, α' et β', se réduiront aux parties homogènes des plus hauts degrés; de même, l'équation $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, pour les mêmes valeurs infinies de α, β, α' et β', se réduira aussi à une équation homogène en α, β, α' et β'.

Les valeurs infinies de α, β, α' et β' seront donc déterminées par trois équations homogènes qui assigneront les valeurs des rapports deux à deux de ces quatre quantités, et, notamment, celles des rapports $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\beta'}{\alpha'}$, ou les valeurs des tangentes des arguments de x et de y devenus infinis.

Cela posé, supposons que l'on ait recherché, par les

méthodes ordinaires, les asymptotes d'un lieu

$$f(x, y) = 0,$$

et qu'on ait trouvé pour l'une d'elles un coefficient angulaire égal à $m + n\sqrt{-1}$, et une ordonnée à l'origine, égale à $p + q\sqrt{-1}$: en raison du calcul même, l'élimination de y entre

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

fournira une équation d'un degré moindre de deux unités que celui de $f(x, y) = 0$.

Ainsi, si l'on adjoignait séparément, aux deux équations

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

une même relation complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

les deux courbes ainsi définies seraient asymptotes l'une à l'autre, et auraient en commun deux points à l'infini.

Les conclusions seront les mêmes si l'on prend, pour relation complémentaire commune, $\frac{\beta'}{\beta} = C$; mais alors les deux courbes considérées seront : l'une la conjuguée C du lieu

$$f(x, y) = 0$$

et l'autre la droite de caractéristique C du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}.$$

On voit ainsi que, lorsqu'on rencontre, pour un lieu algébrique, une asymptote imaginaire, en réalité, on a

trouvé un faisceau d'asymptotes à toutes les conjuguées de ce lieu.

On peut vérifier cette proposition de la manière suivante :

Si, en recherchant les asymptotes d'une courbe $f(x, y) = 0$, on a trouvé, pour l'une d'elles,

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1},$$

il résultera du calcul même que, l'une des formes de y, définie par l'équation $f(x, y) = 0$, se trouvera être

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}$$

plus une fonction $\varphi(x)$ dont le module tendrait vers zéro, lorsque le module de x croîtrait indéfiniment. Mais, si l'on considère les deux lieux à abscisses réelles, définis par les deux équations

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p - q\sqrt{-1}$$

et

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1} + \varphi(x),$$

d'une part, ils se réduiront, le premier, à la conjuguée $C = \infty$ du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}:$$

et, le second, à une branche de la conjuguée $C = \infty$ du lieu

$$f(x, y) = 0.$$

D'ailleurs, les équations en coordonnées réelles de ces deux lignes seront, la première,

$$y = (m - n)x + p + q$$

et, la seconde,

$$y = (m + n)x + p + q + \varphi_1(x) + \varphi_2(x),$$

$\varphi_1(x)$ désignant la partie réelle évanouissante de $\varphi(x)$.

et $\varphi_2(x)$ le coefficient, aussi évanouissant, de $\sqrt{-1}$, dans $\varphi(x)$.

La droite $C = \varkappa$ du faisceau

$$y = (m + n\sqrt{-1})x - p - q\sqrt{-1}$$

sera donc asymptote à la conjuguée $C = \varkappa$ du lieu

$$f(x, y) = 0.$$

Cela posé, il est clair que, si deux lieux, de degrés m et n, sont tels qu'en éliminant y entre leurs équations par rapport à un système donné d'axes, l'équation résultante en x soit du degré $mn - p$ seulement, il en sera toujours de même, quels que soient les nouveaux axes auxquels on viendrait ensuite à rapporter les deux lieux, parce que, aux $mn - p$ solutions finies trouvées précédemment, il correspondra toujours, en raison des formules de transformation, $mn - p$ solutions finies, nouvelles, et que, aux p anciennes solutions infinies, il correspondra, de même, p solutions nouvelles infinies.

Il en résulte que, si l'élimination de y entre

$$y = (m + n\sqrt{-1})x - p - q\sqrt{-1}$$

et une équation

$$f(x, y) = 0$$

de degré m, conduit à une équation en x, de degré $(m - 2)$ seulement, le même fait se reproduira entre les équations des deux mêmes lieux, rapportés ensuite à de nouveaux axes quelconques; de sorte que les conjuguées des deux lieux, dont les cordes réelles seraient parallèles au nouvel axe des y, seront perpétuellement asymptotes l'une à l'autre. On voit ainsi que, si l'une des asymptotes d'une courbe se présente sous une forme imaginaire

$$y = (m - n\sqrt{-1})x + p + q\sqrt{-1}.$$

cette équation représentera un faisceau d'asymptotes à toutes les conjuguées de la courbe, et que la conjuguée C du faisceau sera l'une des asymptotes de la conjuguée C de la courbe.

Une asymptote réelle, $y = mx + p$, à la courbe réelle est aussi asymptote à la conjuguée $C = m$ du lieu; en effet, $y = mx + p$ sera une corde réelle de la conjuguée $\frac{\beta'}{\beta} = m$ du lieu, mais elle coupera cette conjuguée à l'infini. La même asymptote réelle $y = mx + p$ sera aussi généralement asymptote à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, parce que m correspondra généralement à une direction limite, pour les tangentes à la courbe réelle, de sorte que si l'on faisait varier m infiniment peu, dans un sens convenable, l'ordonnée à l'origine de la tangente parallèle à la nouvelle direction deviendrait imaginaire.

Si l'on avait trouvé pour une asymptote d'un lieu une équation à coefficient angulaire réel

$$y = mx + p + q\sqrt{-1},$$

cette équation représenterait une tangente à l'infini à l'enveloppe imaginaire des conjuguées, c'est-à-dire une asymptote à cette enveloppe.

L'équation en coordonnées réelles de cette asymptote serait d'ailleurs

$$y = mx + p + q.$$

Corollaire I. — Le nombre des asymptotes réelles ou imaginaires, d'une courbe de degré m est m: mais l'équation d'une asymptote imaginaire en fournit une effective pour chaque conjuguée; on en conclut que le nombre total des asymptotes de la courbe réelle et d'une quelconque de ses conjuguées est toujours m.

Corollaire II. — Si les asymptotes d'une courbe de

degré m, étaient réelles, chacune d'elles, à la vérité, pourrait être considérée comme asymptote à la conjuguée du lieu dont la caractéristique serait égale au coefficient angulaire de cette asymptote ; mais les conjuguées, dont les caractéristiques n'auraient pour valeurs aucun des m coefficients angulaires des m asymptotes, n'auraient pas d'asymptotes, ni par conséquent de branches infinies; elles seraient donc entièrement composées d'anneaux fermés.

9. *Théorie des contacts des divers ordres des courbes imaginaires et, en particulier, de leur courbure.* — Si deux équations

$$f(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1(X, Y) = 0,$$

qui admettent une solution commune

$$x = \alpha_0 + \beta_0\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha'_0 + \beta'_0\sqrt{-1},$$

fournissent, pour cette solution, les mêmes valeurs de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^py}{dx^p}$, et si l'on adjoint séparément aux deux équations $f = 0$ et $f_1 = 0$ une même condition complémentaire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

admettant la solution $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\alpha' = \alpha'_0$ et $\beta' = \beta'_0$, les deux courbes ainsi définies, réalisées selon la règle générale par $x_1 = \alpha + \beta$ et $y_1 = \alpha' + \beta'$, auront $p + 1$ points communs confondus avec le point

$$[\alpha_0 + \beta_0, \alpha'_0 + \beta'_0],$$

c'est-à-dire auront en ce point un contact de l'ordre p.

En effet, soient, au point $[x, y]$,

$$\frac{dy}{dx} = m_1 + n_1\sqrt{-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m_2 - n_2\sqrt{-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{d^py}{dx^p} = m_p + n_p\sqrt{-1},$$

les valeurs communes, fournies séparément par les deux équations $f = 0$ et $f_1 = 0$ pour $X = x$ et $Y = y$, des p premières dérivées de Y par rapport à X, si l'on veut connaître les coordonnées $[x + d_1x, y + d_1y]$ de deux points infiniment voisins du point $[x, y]$, sur les deux courbes considérées, en posant $d_1x = d\alpha_0 + d\beta_0\sqrt{-1}$ et $d_1y = d\alpha'_0 + d\beta'_0\sqrt{-1}$, on aura, pour déterminer $d\alpha_0$, $d\beta_0$, $d\alpha'_0$ et $d\beta'_0$, les conditions

$$d\alpha'_0 + d\beta'_0\sqrt{-1} = (m_1 + n_1\sqrt{-1})(d\alpha_0 + d\beta_0\sqrt{-1})$$

ou

$$d\alpha'_0 = m_1\,d\alpha_0 - n_1\,d\beta_0$$

et

$$d\beta'_0 = m_1\,d\beta_0 + n_1\,d\alpha_0,$$

avec

$$\varphi'_{\alpha_0}d\alpha_0 + \varphi'_{\beta_0}d\beta_0 + \varphi'_{\alpha'_0}d\alpha'_0 + \varphi'_{\beta'_0}d\beta'_0 = 0;$$

c'est-à-dire, pour les deux courbes, trois équations homogènes identiques entre $d\alpha_0$, $d\beta_0$, $d\alpha'_0$ et $d\beta'_0$, d'où l'on conclura les mêmes valeurs pour $\frac{d\beta_0}{d\alpha_0}$, et, par suite, pour $\frac{d\beta'_0}{d\alpha'_0}$, c'est-à-dire pour d_1x et pour d_1y, si l'on suppose qu'on prenne, des deux côtés, la même valeur pour $d\alpha_0$.

Les deux courbes auront donc un second point commun confondu avec le point $[\alpha_0 + \beta_0, \alpha'_0 + \beta'_0]$, et les coordonnées imaginaires de ce second point seront $x + d_1x$ et $y + d_1y$.

En ce second point, les dérivées de y par rapport à x, tirées de l'une ou de l'autre des équations $f = 0$ ou $f_1 = 0$, auront pris leurs anciennes valeurs augmentées des produits par $d_1 x$ de leurs dérivées, c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = (m_1 + n_1\sqrt{-1}) + (m_2 - n_2\sqrt{-1})\, d_1 x,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = (m_2 + n_2\sqrt{-1}) + (m_3 + n_3\sqrt{-1})\, d_1 x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} = (m_{p-1} + n_{p-1}\sqrt{-1}) + (m_p - n_p\sqrt{-1})\, d_1 x:$$

elles seront donc les mêmes de part et d'autre, jusqu'à l'ordre $p - 1$.

Quant aux dérivées $p^{\text{ièmes}}$ de y par rapport à x, elles ne seraient plus les mêmes au point $[x + d_1 x, y + d_1 y]$, $m_{p+1} + n_{p+1}\sqrt{-1}$ n'ayant plus la même valeur sur les deux lieux.

Quoi qu'il en soit, on démontrera comme précédemment que les deux courbes auront encore, au delà du point correspondant à la solution $(x + d_1 x, y + d_1 y)$, un autre point commun $[x + d_1 x + d_2 x, y + d_1 y + d_2 y]$, et ainsi de suite, jusqu'au $(p - 1)^{\text{ième}}$ point

$$[x + d_1 x + d_2 x + \ldots + d_p x,\ y + d_1 y + d_2 y + \ldots + d_p y]:$$

mais le raisonnement ne pourrait pas s'étendre au delà, puisque, arrivés à ce $(p + 1)^{\text{ième}}$ point, on ne pourrait plus dire que les dérivées premières de y par rapport à x seraient encore les mêmes, soit qu'on les tirât de $f = 0$ ou de $f_1 = 0$.

Le théorème énoncé est donc établi quelle que soit la relation $\varphi = 0$.

Il subsistera si, au lieu d'une relation de forme quelconque, satisfaite par les valeurs α_0, β_0, α'_0, β'_0 des va-

riables, on prend spécialement la relation

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\beta'_0}{\beta_0} = C,$$

C étant la caractéristique du point $[x_0, y_0]$, et alors le théorème s'énoncera dans les termes suivants :

Si, en un point commun à deux lieux $f(X, Y) = 0$ et $f_1(X, Y) = 0$, les dérivées de X par rapport à Y, jusqu'à la $p^{\text{ième}}$, sont les mêmes, soit qu'on les tire de l'équation $f = 0$ ou de l'équation $f_1 = 0$, les conjuguées des deux lieux, passant par ce point commun, y auront un contact du $p^{\text{ième}}$ ordre.

Le théorème subsisterait encore si, au lieu d'être définies par une équation commune $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, les deux courbes considérées l'étaient par la condition concrète, de constituer les enveloppes imaginaires des conjuguées des deux lieux $f = 0$ et $f_1 = 0$, c'est-à-dire que, si les enveloppes imaginaires de deux lieux $f = 0$ et $f_1 = 0$ ont un point commun $[x, y]$ et que les deux équations $f = 0$ et $f_1 = 0$ fournissent séparément les mêmes valeurs en ce point pour

$$\frac{dY}{dX}, \quad \frac{d^2Y}{dX^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^pY}{dX^p},$$

les deux enveloppes imaginaires auront, au point réalisant la solution $X = x$, $Y = y$ un contact de l'ordre p.

Mais la démonstration doit être un peu modifiée pour s'appliquer à ce cas.

Soient au point $[x, y]$, commun aux deux enveloppes,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = m_1, \quad \text{quantité réelle, par hypothèse,}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m_2 - n_2\sqrt{-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d^py}{dx^p}\right) = m_p - n_p\sqrt{-1}.$$

les valeurs communes des dérivées de Y par rapport à X, au point $[x, y]$, tirées de $f(X, Y) = 0$ ou de $f_1(Y, X) = 0$.

Si l'on voulait obtenir, sur l'une ou l'autre enveloppe, un point $[x + d_1 x, y + d_1 y]$ infiniment voisin du point $[x, y]$, en faisant $d_1 x = d_1 \alpha_0 + d_1 \beta_0 \sqrt{-1}$ et $d_1 y = d_1 \alpha'_0 + d_1 \beta'_0 \sqrt{-1}$, on devrait d'abord, dans les deux cas, faire

$$\frac{d_1 \alpha'_0 + d_1 \beta'_0 \sqrt{-1}}{d_1 \alpha_0 + d_1 \beta_0 \sqrt{-1}} = m_1,$$

c'est-à-dire

$$d_1 \alpha'_0 = m_1 d_1 \alpha_0 \qquad \text{et} \qquad d_1 \beta'_0 = m_1 d_1 \beta_0 :$$

d'un autre côté, le point $[x_1 + d_1 x, y + d_1 y]$ ayant dû rester sur l'une ou l'autre enveloppe, il faudrait que la valeur de $\left(\frac{dY}{dX}\right)$ en ce point fût restée réelle, mais cette nouvelle valeur de $\frac{dY}{dX}$ se formerait dans les deux cas de l'ancienne m_1, augmentée du produit par $d_1 x$, de sa dérivée, c'est-à-dire de

$$(m_2 + n_2 \sqrt{-1}) d_1 x \quad \text{ou} \quad (m_2 + n_2 \sqrt{-1})(d_1 \alpha_0 + d_1 \beta_0 \sqrt{-1}),$$

$d_1 \alpha_0$ et $d_1 \beta_0$ devraient donc dans les deux cas satisfaire à la même condition

$$m_2 d_1 \beta_0 + n_2 d_1 \alpha_0 = 0,$$

d'où

$$\frac{d_1 \beta_0}{d_1 \alpha_0} = -\frac{n_2}{m_2},$$

de sorte que si l'on prenait, dans les deux cas, la même valeur pour $d_1 \alpha_0$, on trouverait les mêmes valeurs pour $d_1 x$ et $d_1 y$.

D'où l'on voit que, dans les hypothèses admises, les deux enveloppes auront au moins deux points infini-

ment voisins communs, correspondant aux deux solutions $[x, y]$ et $[x + d_1 x, y + d_1 y]$.

Au second point $[x + d_1 x, y + d_1 y]$, les dérivées de Y par rapport à X seront devenues

$$\frac{dY}{dX} = m_1 - (m_2 - n_2\sqrt{-1})\, d_1 x, \quad \text{quantité réelle.}$$

$$\frac{d^2 Y}{dX} = (m_2 + n_2\sqrt{-1}) - (m_3 - n_3\sqrt{-1})\, d_1 x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} = (m_{p-1} - n_{p-1}\sqrt{-1}) - (m_p + n_p\sqrt{-1})\, d_1 x;$$

elles seront encore les mêmes sur les deux lieux, jusqu'à l'ordre $p - 1$; on démontrerait donc, comme précédemment, que les deux enveloppes auront encore en commun un troisième point

$$[x + d_1 x - d_2 x,\ y + d_1 y - d_2 y],$$

et ainsi de suite jusqu'au $(p - 1)^{\text{ième}}$ point. En résumé, les deux enveloppes auront $p - 1$ points communs infiniment voisins du point $[x, y]$, c'est-à-dire auront en ce point un contact de l'ordre p.

Il résulte immédiatement de ces deux théorèmes généraux :

1° Que le rayon de courbure d'une conjuguée quelconque d'un lieu quelconque, au point où cette conjuguée touche l'enveloppe réelle du lieu, est égal au rayon de courbure de cette enveloppe réelle au même point.

En effet, si l'on a déterminé par le calcul le centre $[a, b]$ et le rayon R du cercle osculateur à une courbe $f(X, Y) = 0$ en l'un de ses points réels $[x, y]$, les deux équations

$$f(X, Y) = 0 \qquad \text{et} \qquad (X - a)^2 + (Y - b)^2 = R^2$$

admettront la solution commune $[x, y]$ et fourniront en ce point, pour $\frac{dY}{dX}$ et $\frac{d^2Y}{dX^2}$, les mêmes valeurs; les conjuguées des deux courbes réelles qui se toucheront en ce point auront donc aussi entre elles un contact du second ordre, c'est-à-dire auront même rayon de courbure; mais on constate aisément que l'hyperbole équilatère conjuguée d'un cercle a, en son sommet, pour rayon de courbure, le rayon même du cercle.

On en conclut le théorème énoncé.

2° Si la valeur de l'expression

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

calculée en un point $[x, y]$ de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu $f(X, Y) = 0$, est

$$r + r'\sqrt{-1},$$

le rayon de courbure de cette enveloppe en ce point $[x, y]$ sera

$$r - r'.$$

En effet, si les formules usuelles ont donné, pour les coordonnées du centre du cercle osculateur au point $[x, y]$ de $f(X, Y) = 0$,

$$a + b\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad a' + b'\sqrt{-1},$$

les deux équations

$$f(X, Y) = 0$$

et

$$(X - a - b\sqrt{-1})^2 + (Y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

admettront la solution commune $[x, y]$ et fourniront,

pour $\frac{dY}{dX}$ et pour $\frac{d^2Y}{dX^2}$, les mêmes valeurs en ce point; mais $\frac{dy}{dx}$ sera réel, le point $[x, y]$ étant supposé appartenir à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu $f(X, Y) = 0$, ce point appartiendra donc aussi à l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$(X - a - b\sqrt{-1})^2 + (Y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

c'est-à-dire au cercle

$$(X - a - b)^2 + (Y - a' - b')^2 = (r - r')^2;$$

d'ailleurs les enveloppes imaginaires des deux lieux auront entre elles un contact du second ordre au point correspondant à la solution $[x, y]$; elles auront donc, en ce point, même rayon de courbure.

On en conclut le théorème énoncé.

Parabole osculatrice d'ordre p à une conjuguée quelconque en un quelconque de ses points. — La parabole osculatrice d'ordre p, à une courbe réelle, en un de ses points $[x, y]$, est représentée par l'équation

$$Y = y + \frac{dy}{dx}(X - x) + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(X - x)^2}{1.2} + \ldots + \frac{d^py}{dx^p}\frac{(X - x)^n}{1.2\ldots n}.$$

Si l'on avait rapporté un lieu $f(X, Y) = 0$ à des axes tels, que les abscisses de la conjuguée C de ce lieu devinssent réelles, l'équation en coordonnées imaginaires d'une des branches de cette conjuguée prendrait la forme

$$Y' = \varphi(X') + \psi(X')\sqrt{-1},$$

X' étant réel; mais l'équation de cette branche, en coordonnées réelles, serait

$$Y_1 = \varphi(X_1) + \psi(X_1);$$

les dérivées de Y' par rapport à X' étant supposées égales à

$$m_1 - n_1\sqrt{-1},$$
$$m_2 - n_2\sqrt{-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$m_p - n_p\sqrt{-1},$$

celles de Y'_1 par rapport à X'_1 seraient

$$m_1 - n_1,$$
$$m_2 - n_2,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$m_p - n_p;$$

l'équation de la parabole osculatrice d'ordre p, à la conjuguée considérée, au point $[x'_1, y'_1]$, serait donc, dans le nouveau système d'axes,

$$Y'_1 = y'_1 + (m_1 + n_1)\frac{X_1 - x_1}{1} + (m_2 - n_2)\frac{(X'_1 - x'_1)^2}{1.2} - \dots$$
$$- (m_p + n_p)\frac{(X'_1 - x'_1)^p}{1.2\dots p}.$$

On obtiendrait donc immédiatement l'équation, dans le nouveau système d'axes, de la parabole cherchée, si l'on connaissait les dérivées $m_1 + n_1\sqrt{-1}$, ..., $m_p + n_p\sqrt{-1}$ de la nouvelle ordonnée y' par rapport à la nouvelle abscisse; mais ces dérivées $\frac{dy'}{dx'}$, ..., $\frac{d^p y'}{dx'^p}$ pourront toujours être trouvées en fonction de $\frac{dy}{dx}$, ... $\frac{d^p y}{dx^p}$, sans qu'on soit obligé d'effectuer la transformation des coordonnées; il suffira en effet, pour cela, de dériver jusqu'à l'ordre p les formules de la transformation.

Ainsi, supposons, pour plus de simplicité, que les premiers axes fussent rectangulaires, qu'on ait conservé

l'ancien axe des x et qu'on ait seulement dirigé l'axe des y' parallèlement aux cordes réelles de la conjuguée en question : les formules de transformation seront

$$y' = \frac{y}{\sin\alpha} \qquad \text{et} \qquad x' = x - y\cot\alpha',$$

α' désignant l'angle du nouvel axe des y avec l'ancien axe des x.

On déduira de ces formules

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{1}{\sin\alpha'}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dx'} \qquad \text{et} \qquad \frac{dx'}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}\cot\alpha',$$

d'où

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{1}{\sin\alpha'}\frac{dy}{dx}\frac{1}{1 - \frac{dy}{dx}\cot\alpha'};$$

puis

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{1}{\sin\alpha'}\frac{d\dfrac{\frac{dy}{dx}}{1 - \frac{dy}{dx}\cot\alpha'}}{dx}\frac{dx}{dx'}$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha}\frac{d\dfrac{\frac{dy}{dx}}{1 - \frac{dy}{dx}\cot\alpha'}}{dx}\frac{1}{1 - \frac{dy}{dx}\cot\alpha'},$$

et ainsi de suite.

On pourrait donc développer en série, par la formule de Taylor, l'ordonnée réalisée d'une conjuguée quelconque d'un lieu quelconque.

Revenons au rayon de courbure d'une conjuguée quelconque en un quelconque de ses points.

Si le lieu était rapporté à deux axes rectangulaires dont l'un, celui des y, fût parallèle aux cordes réelles de

la conjuguée considérée, et si $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ avaient pour valeurs, en un point de cette conjuguée,

$$\frac{dy}{dx} = m + n\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p + q\sqrt{-1},$$

les dérivées de l'ordonnée réalisée, par rapport à l'abscisse réelle, auraient en ce point pour valeurs

$$\frac{dy_1}{dx_1} = m + n \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y_1}{dx_1^2} = p + q,$$

en sorte que le rayon de courbure serait représenté par

$$R = \frac{[1 + (m + n)^2]^{\frac{3}{2}}}{p + q}.$$

Si le lieu était rapporté à des axes rectangulaires quelconques, les formules de transformation feraient connaître, comme on l'a vu, les quantités cherchées $m + n$ et $p + q$.

Le calcul fait directement donne, par rapport à des axes rectangulaires quelconques,

$$R = \left[\frac{(n + C)^2 + n^2(n - C)^2}{1 - n^2}\right]^{\frac{3}{2}} \frac{r^2 + r'^2}{(r - r')(C^3 - 3Cn^2) + (r + r')(3C^2n - n^3)},$$

où c désigne la caractéristique de la conjuguée considérée, $r + r'\sqrt{-1}$ la valeur de l'expression

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

calculée au point considéré, et n le rapport du petit au

grand axe de l'ellipse évanouissante

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

qui contient les éléments du lieu au point considéré.

Si le point considéré de la conjuguée c était celui où elle touche l'enveloppe imaginaire, n serait nul et la formule précédente se réduirait à

$$R = \frac{r^2 + r'^2}{r - r'};$$

on peut arriver à ce résultat en partant de la formule donnée plus haut

$$R = \frac{[1 + (m + n)^2]^{\frac{3}{2}}}{p + q}.$$

En y faisant d'abord $n = 0$, puisque le point considéré appartient à l'enveloppe imaginaire, il vient

$$R = \frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{p + q};$$

mais la formule

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

donnerait toujours pour R la même valeur $r + r'\sqrt{-1}$, au même point, quels que fussent les axes rectangulaires auxquels le lieu fût rapporté; on peut donc poser, en supposant les axes rectangulaires, l'axe des y parallèle aux cordes réelles de la conjuguée et $\frac{d^2y}{dx^2} = p + q\sqrt{-1}$, au point considéré, avec $\frac{dy}{dx} = m$

$$r + r'\sqrt{-1} = \frac{(1 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{p + q\sqrt{-1}},$$

d'où l'on tire

$$p = \frac{r(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+r'^2} \qquad \text{et} \qquad q = -r'\frac{(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+r'^2}$$

et, par suite,

$$p+q = \frac{(r-r')(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+r'^2},$$

d'où

$$R = \frac{r^2+r'^2}{r-r'}.$$

Théorème. — *La développée de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu plan est l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la développée du lieu.*

Cette relation remarquable entre les deux enveloppes se démontre de la manière suivante :

Soient $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ les coordonnées imaginaires d'un point $x_1 = \alpha + \beta$, $y_1 = \alpha' + \beta'$ de l'enveloppe imaginaire d'un lieu $f(X, Y) = 0$; m la valeur réelle de $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$ en ce point et $\frac{\beta'}{\beta} = C$: le faisceau

$$Y - y = m(X - x)$$

ou

$$Y = mX + \alpha' + \beta'\sqrt{-1} - m(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

des tangentes au lieu $f(X, Y) = 0$, au point

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1},$$

se réduira à la seule droite

$$Y = mX + \alpha' - m\alpha + \beta' - m\beta,$$

tangente à l'enveloppe imaginaire au point

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta';$$

d'un autre côté, le faisceau

$$Y - y = -\frac{1}{m}(X - x)$$

ou

$$Y = -\frac{1}{m}X + \alpha' + \beta'\sqrt{-1} + \frac{1}{m}(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

se réduira à la seule droite

$$Y = -\frac{1}{m}X + \alpha' + \beta' + \frac{1}{m}(\alpha + \beta),$$

et cette droite sera normale à l'enveloppe imaginaire au point considéré, c'est-à-dire sera tangente à la développée de l'enveloppe imaginaire.

Ainsi

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x)$$

sera l'équation générale en coordonnées imaginaires des tangentes à la développée de l'enveloppe imaginaire; d'un autre côté

$$Y - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X - x),$$

où x et y seraient réels, serait l'équation générale des tangentes à la développée de la courbe réelle.

Mais, dans les deux cas, $y + \frac{1}{\frac{dy}{dx}}x$ sera la même fonction de x, ou de m, qui dépend de x.

Les deux développées seront donc respectivement les enveloppes de systèmes de droites, tels que

$$Y = mX - \varphi(m) \pm \sqrt{\psi(m)}$$

et

$$Y = mX + \varphi(m) \pm \sqrt{-\psi(m)}.$$

c'est-à-dire que chacune d'elles sera l'enveloppe imaginaire des conjuguées de l'autre.

Quadratures.

10. *Une seule intégration suffit aux quadratures du lieu réel et de toutes ses conjuguées.* — En effet, d'abord, si les ordonnées de deux branches de la conjuguée à abscisses réelles sont

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{-\psi(x)}\sqrt{-1},$$

celles des deux branches correspondantes de la courbe réelle seront

$$y = \varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)},$$

et si l'on a pu obtenir l'intégrale indéfinie

$$\int_{x_0}^{x} [\varphi(x) \pm \sqrt{\psi(x)}]\, dx,$$

on aura obtenu en même temps l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} [\varphi(x) \pm \sqrt{-\psi(x)}\sqrt{-1}]\, dx.$$

Si, en prenant cette dernière entre des limites a et b, on a trouvé pour résultat

$$A \pm B\sqrt{-1},$$

A sera l'aire du diamètre correspondant aux cordes réelles de la conjuguée, B sera l'aire comprise entre la conjuguée et son diamètre, et $A \pm B$ sera l'aire même de cette conjuguée.

Ainsi, si l'on a pu obtenir l'intégrale $\int y\, dx$, elle fournira la quadrature d'une branche quelconque de la conjuguée à abscisses réelles, et l'on peut remarquer

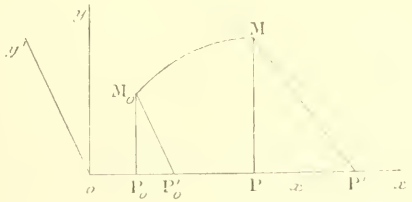
que l'aire de cette conjuguée sera mieux représentée que celle de la courbe réelle, parce que la présence du signe $\sqrt{-1}$ s'opposera à toute confusion entre l'aire du diamètre et l'aire de la courbe au-dessus ou au-dessous de son diamètre.

On pourrait obtenir l'aire d'une conjuguée quelconque en la rapportant au même axe des x et à un nouvel axe des y parallèle aux cordes réelles de cette conjuguée; mais la transformation ne sera jamais nécessaire, parce qu'il suffira d'obtenir l'aire indéfinie de la courbe réelle dans le nouveau système et que les aires de cette courbe, dans les deux systèmes, se déduisent aisément l'une de l'autre par l'addition et la soustraction de deux triangles.

Soient

OX, OY (*fig.* 6) les axes rectangulaires auxquels la courbe réelle était d'abord rapportée;

Fig. 6.



M_0M un arc quelconque de cette courbe;

OY′ une parallèle aux cordes réelles de la conjuguée qu'on voudrait quarrer;

M_0P_0 et MP les ordonnées anciennes de M_0 et M;

$M_0P'_0$ et MP′ leurs ordonnées nouvelles.

Si l'on connaissait l'expression de l'aire indéfinie P'_0M_0MP', on en tirerait l'aire indéfinie de la conjuguée considérée, comprise entre l'axe des x, un arc

quelconque de cette conjuguée et les cordes réelles passant par les extrémités de cet arc.

Mais on passe de l'aire supposée connue P_0M_0MP à l'aire cherchée P'_0M_0MP' en ajoutant à la première l'aire du triangle PMP' et en en retranchant celle du triangle $P_0M_0P'_0$; soient $x_0\,y_0$ et $x'_0\,y'_0$ les coordonnées anciennes et nouvelles du point M_0, xy et $x'y'$ les coordonnées anciennes et nouvelles du point M, les aires des deux triangles MPP' et $M_0P_0P'_0$ seront

$$\tfrac{1}{2}\sin Y'Y\,yy' \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}\sin Y'Y\,y_0y'_0$$

ou

$$-\tfrac{1}{2}\cos Y'X\,yy' \quad \text{et} \quad -\tfrac{1}{2}\cos Y'X\,y_0y'_0;$$

mais il conviendra, dans les expressions de ces deux aires, de remplacer les ordonnées nouvelles y' et y'_0 par leurs valeurs en fonction de y et y_0 : l'une des formules de la transformation intervenue étant

$$y = y'\sin Y'X,$$

d'où

$$y' = \frac{y}{\sin Y'X},$$

on prendra donc, pour expressions des deux triangles,

$$-\frac{y^2}{2}\,\frac{\cos Y'X}{\sin Y'X} \quad \text{et} \quad -\frac{y_0^2}{2}\,\frac{\cos Y'X}{\sin Y'X},$$

c'est-à-dire

$$\frac{y^2}{2C} \quad \text{et} \quad \frac{y_0^2}{2C},$$

C désignant la caractéristique de la conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles au nouvel axe des y.

En définitive, on aura identiquement

$$\sin Y'X\int_{x'_0,\,y_0}^{x',\,y} y'\,dx' = \int_{x_0,\,y_0}^{x,\,y} y\,dx + \frac{y_0^2 - y^2}{2C}.$$

Ainsi la seule intégration, marquée par

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\, dx,$$

fournira les quadratures de toutes les conjuguées du lieu, en sorte que la question, en ce qui concerne ces quadratures, est entièrement résolue.

Il reste une question beaucoup plus importante, au point de vue du Calcul intégral, et qui consiste à obtenir l'interprétation de l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\, dx$$

dans tous les cas que peut présenter le choix des limites $[x_0, y_0]$ et $[x, y]$. Or la formule

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\, dx = \sin Y'X \int_{x'_0, y'_0}^{x', y'} + \frac{y^2 - y_0^2}{2C}$$

fournira cette interprétation dans tous les cas, comme on va le voir.

Mais, cette formule n'ayant été établie, par des considérations géométriques, que dans l'hypothèse particulière où les limites $[x_0, y_0]$ et $[x, y]$ seraient réelles, il ne sera pas inutile d'en donner une démonstration analytique, qui permette de la considérer comme une véritable identité absolue, applicable à tous les cas.

Soient

$$x = mx' + ny' \qquad \text{et} \qquad y = px' + qy'$$

les formules d'une transformation linéaire : la première donne

$$dx = m\, dx' + n\, dy',$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} \int y\, dx &= \int (px' + qy')(m\, dx' + n\, dy') \\ &= mp \int x'\, dx' + nq \int y'\, dy' + mq \int y'\, dx' + np \int x'\, dy' \\ &= \tfrac{1}{2} mp x'^2 + \tfrac{1}{2} nq y'^2 + mq \int y'\, dx' + np \int x'\, dy'; \end{aligned}$$

en intégrant par parties dans le dernier terme, on le remplacera par

$$np(x'y' - \int y'dx'),$$

et l'on aura, en définitive,

$$\int y\,dx = mp\frac{x'^2}{2} + nq\frac{y'^2}{2}\,mpx'y' + (mq - np)\int y'\,dx'.$$

Supposons maintenant la transformation

$$x = x' + y'\cos\alpha', \qquad y = y'\sin\alpha',$$

qui se rapporte au changement d'axes que nous avions en vue, on aura

$$m = 1, \qquad n = \cos\alpha', \qquad p = 0, \qquad q = \sin\alpha',$$

et il en résultera

$$\int y\,dx = \tfrac{1}{2}\sin\alpha'\cos\alpha' y'^2 + \sin\alpha'\int y'\,dx'$$

ou, en remplaçant y'^2 par $\frac{y^2}{\sin^2\alpha'}$,

$$\int y\,dx = \frac{y^2}{2\,\mathrm{C}} + \sin\alpha'\int y'\,dx'.$$

Comme nous l'avons déjà dit, la question la plus intéressante que présente l'étude d'une intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx,$$

où y est une fonction implicite, consiste à définir la valeur concrète de cette intégrale, soit en raison des limites, soit en raison de la succession de valeurs qu'auraient prises les deux variables pour passer de leur état initial $[x_0, y_0]$ à leur état final $[x, y]$, de façon, non seulement à pouvoir, au besoin, si l'intégration n'avait pas pu être effectuée, appliquer à l'évaluation de l'intégrale les méthodes de quadratures approchées, par la substitution, à une courbe, de polygones inscrits et

circonscrits, mais encore à lever les difficultés qui pourraient subsister quand même l'intégration aurait pu être effectuée.

Ces difficultés tiennent d'abord à ce que, si les limites sont données seulement en ce qui concerne x, c'est-à-dire si l'on ne donne que x_0 et x, y_0 et y auront chacune m valeurs, si l'équation entre x et y est de degré m par rapport à y, en sorte que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx$$

aurait toujours au moins m^2 valeurs ; mais surtout à ce que l'intégrale indéfinie $\int y\,dx$, si elle avait pu être obtenue, pourrait être compliquée par la présence de constantes affectées de coefficients entiers arbitraires, comme on le voit par

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x,$$

à l'une quelconque des valeurs de laquelle on peut ajouter un nombre quelconque de fois 2π, et par

$$\int \frac{dx}{x} = \text{L}x,$$

à l'une quelconque des valeurs de laquelle on peut ajouter un nombre quelconque de fois $2\pi\sqrt{-1}$.

Ces constantes sont désignées sous le nom de *périodes de l'intégrale indéfinie;* et les nombres de fois que ces périodes doivent être introduites respectivement dans chaque intégrale définie dépendent du chemin suivi par le point $[x, y]$ pour aller du point $[x_0, y_0]$ au point $[x, y]$.

Nous chercherons d'abord à assigner, pour chaque système de limites, la valeur concrète la plus simple de

l'intégrale définie; nous définirons et assignerons ensuite les valeurs concrètes des différentes périodes, en même temps que nous déterminerons les nombres qui devront en être pris dans chaque cas.

11. *De la valeur concrète la plus simple d'une intégrale, en raison de ses limites.* — Quelles que soient les limites assignées, on pourra toujours les relier l'une à l'autre, et même de plusieurs manières : d'abord par un arc de la conjuguée à laquelle appartiendra la limite inférieure, prolongée jusqu'à son point de contact avec l'une ou avec l'autre des deux enveloppes; par un arc de cette enveloppe, interrompu s'il est nécessaire par un arc d'une conjuguée arbitraire, compris entre deux points consécutifs de contact de cette conjuguée avec l'enveloppe en question, dans le cas où l'on aurait à passer d'une branche de cette enveloppe à une autre de ses branches, qui n'aurait aucun point commun avec la première; par une branche de celle des deux enveloppes sur laquelle serait venu le point mobile, prolongée jusqu'à l'un de ses points de contact avec l'autre enveloppe, si cela était nécessaire; par une branche de celle des deux enveloppes qui toucherait la conjuguée à laquelle appartiendrait la limite supérieure, cette branche étant prolongée jusqu'à son point de contact avec la conjuguée en question; enfin, par l'arc de cette conjuguée qui rejoindrait le point de contact, déterminé précédemment, avec le point représentatif de la limite supérieure.

Le choix de ce chemin assignera la valeur concrète de l'intégrale, en en faisant une somme d'aires connues par ce qui précède, avec les signes sous lesquels il faudrait les introduire, sauf cependant pour le cas, que nous allons examiner à part, du parcours d'un arc de l'enveloppe imaginaire.

Évaluation concrète de l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long d'un arc de l'enveloppe imaginaire. — Soient

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' - \beta'\sqrt{-1}$$

les coordonnées imaginaires d'un point quelconque de l'enveloppe imaginaire des conjuguées d'un lieu : un élément de l'intégrale prise le long de cette enveloppe sera

$$(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$(\alpha' d\alpha - \beta' d\beta) + (\beta' d\alpha + \alpha' d\beta)\sqrt{-1};$$

la valeur totale de l'intégrale s'exprimera donc par

$$(\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta) + (\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta)\sqrt{-1}.$$

Considérons en même temps la branche de l'enveloppe imaginaire qui contiendrait les points imaginaires conjugués de ceux de la première, les coordonnées imaginaires d'un de ses points seront

$$x = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' - \beta'\sqrt{-1},$$

et l'un des éléments de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de cette seconde branche, serait

$$(\alpha' - \beta'\sqrt{-1})(d\alpha - d\beta\sqrt{-1})$$

ou

$$\alpha' d\alpha - \beta' d\beta - (\beta' d\alpha - \alpha' d\beta)\sqrt{-1},$$

de sorte que la valeur totale de l'intégrale, prise le long de la seconde branche, s'exprimera par

$$(\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta) - (\Sigma\beta' d\alpha - \Sigma\alpha' d\beta)\sqrt{-1}.$$

Mais les coordonnées réelles d'un point du premier arc de l'enveloppe seraient $\alpha - \beta$ et $\alpha' + \beta'$, et celles

du point correspondant du second arc seraient $\alpha - \beta$ et $\alpha' - \beta'$, de sorte que les aires comprises entre les deux arcs, l'axe des x et les ordonnées des extrémités de ces arcs, seraient

$$\begin{aligned} S &= \int(\alpha' + \beta')(d\alpha + d\beta) \\ &= (\Sigma\alpha' d\alpha + \Sigma\beta' d\beta) + (\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S' &= \int(\alpha' - \beta')(d\alpha - d\beta) \\ &= (\Sigma\alpha' d\alpha + \Sigma\beta' d\beta) - (\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta); \end{aligned}$$

ces deux équations donnent, par addition et par soustraction,

$$\Sigma\alpha' d\alpha + \Sigma\beta' d\beta = \frac{S + S'}{2}$$

et

$$\Sigma\beta' d\alpha + \Sigma\alpha' d\beta = \frac{S - S'}{2};$$

d'un autre côté, si l'on appelle S_1 l'aire du lieu des points milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués des deux arcs de l'enveloppe, c'est-à-dire si l'on pose

$$S_1 = \Sigma\alpha' d\alpha,$$

on aura

$$\Sigma\alpha' d\alpha - \Sigma\beta' d\beta = 2S_1 - \frac{S + S'}{2}.$$

L'intégrale $I = \int y\,dx$, prise le long du premier arc, aura donc pour valeur

$$I = 2S_1 - \frac{S + S'}{2} + \frac{S - S'}{2}\sqrt{-1};$$

quant à celle qui correspondrait au parcours du second arc, elle sera

$$I' = 2S_1 - \frac{S + S'}{2} - \frac{S - S'}{2}\sqrt{-1}.$$

Ainsi, dans tous les cas, quelles que soient les limites et

quel que soit le nombre des arcs à emprunter aux deux enveloppes et aux conjuguées pour rejoindre ces deux limites, les m^2 valeurs de l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\, dx$$

s'exprimeront toujours par des sommes d'aires connues; et l'une quelconque de ces aires pourra être obtenue par les formules ordinaires de quadrature approchée, parce que, sachant mener les tangentes aux deux enveloppes et aux conjuguées, on pourra toujours comprendre chaque aire à évaluer entre les aires de deux figures polygonales : l'une inscrite, l'autre circonscrite à l'arc correspondant du lieu.

En résumé, les m^2 valeurs de la quadratrice

$$\int_{x_0}^{x} y\, dx$$

d'un lieu $f(x, y) = 0$, de degré m, pourront toujours recevoir des définitions nettes du choix de chemins, empruntés tant aux conjuguées qu'aux deux enveloppes, et propres à rejoindre les m limites inférieures de l'intégrale à ses m limites supérieures.

A la vérité, le chemin à suivre pour relier l'une des limites inférieures à l'une des limites supérieures pourrait être modifié de bien des manières différentes.

Mais toutes les intégrales qui auront le même système de limites ne pourront différer les unes des autres que par des constantes, parce qu'elles auront la même différentielle.

12. *Théorème de l'indépendance de la valeur d'une intégrale $\int y\, dx$ envers le chemin suivi pour en rejoindre les deux limites.* — La théorie précédente pour-

rait se suffire à elle-même ; cependant elle sera utilement complétée par un théorème dû à Cauchy, au moyen duquel on fera disparaître ce qu'il y a en apparence d'arbitraire dans le choix exclusif des chemins définis plus haut. Ce théorème, d'ailleurs, nous permettra d'obtenir l'infinie multitude des formes géométriques des aires propres à représenter les périodes d'une intégrale.

Ce théorème peut s'énoncer de la manière suivante : Un chemin $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, propre à rejoindre les deux limites d'une intégrale, et qui ne passe par aucun point du lieu considéré $f(x, y) = 0$, où la fonction y ou ses dérivées deviennent infinies, à partir d'un certain ordre, peut être modifié infiniment peu, puis insensiblement d'une manière appréciable, sans qu'il en résulte aucun changement dans la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, les limites restant les mêmes, pourvu que, durant sa déformation continue, ce chemin ne passe jamais par un seul point du lieu où y ou ses dérivées deviennent infinies à partir d'un certain ordre.

On peut établir ce théorème de la manière suivante :

Considérons seulement un élément de l'intégrale $\int y\,dx$: si l'on représente la fonction y par

$$F(x) = F(\alpha - \beta\sqrt{-1}),$$

on pourra indifféremment remplacer cet élément par

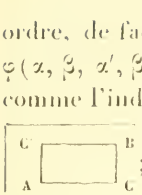
$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha + F(\alpha - d\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1}$$

ou par

$$F(\alpha - \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1} - F(\alpha, \beta\sqrt{-1} - d\beta\sqrt{-1})\,d\alpha,$$

c'est-à-dire, qu'au lieu de faire croître en même temps α et β, pour obéir à la loi $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, on pourra les faire croître successivement dans l'un ou l'autre

ordre, de façon à modifier l'élément du chemin assigné $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, et à le changer indifféremment, comme l'indique la figure, de AB en ACB ou en AC'B,



; mais à la condition que

$$F(\alpha + d\alpha + \beta\sqrt{-1})\, d\beta\sqrt{-1}$$

et

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1})\, d\alpha$$

puissent se confondre respectivement avec

$$F(\alpha + \beta\sqrt{-1})\, d\beta\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad F(\alpha + \beta\sqrt{-1})\, d\alpha,$$

c'est-à-dire, comme

$$F(\alpha + d\alpha + \beta\sqrt{-1}) = F(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\, d\alpha$$

et

$$\begin{aligned} &F(\alpha + \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1}) \\ &\quad = F(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\, d\beta\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

à la condition que $F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ ne soit pas infini, sans quoi $F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\, d\alpha$, ni $F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})\, d\beta\sqrt{-1}$ ne pourraient plus être négligés.

On pourrait, sous des conditions analogues, modifier de même tous les éléments de l'intégrale, les uns dans un sens, les autres dans l'autre ; et recommencer indéfiniment, tant que le nouveau chemin ne contiendrait aucun des points où la fonction ou ses dérivées deviendraient infinies.

Nous énonçons ainsi les conditions à remplir par le chemin mobile : d'abord parce que, si y devenait infini, sa dérivée le deviendrait aussi; en second lieu, parce que pour pouvoir de nouveau isoler, dans le nouveau dx, le nouveau $d\alpha$ du nouveau $d\beta$, et les faire passer l'un avant l'autre, dans l'un ou l'autre ordre, il fau-

drait que

$$F'(\alpha + d\alpha + \beta\sqrt{-1}) = F'(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F''(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\alpha$$

ou

$$\begin{aligned} &F'(\alpha + \beta\sqrt{-1} + d\beta\sqrt{-1}) \\ &\quad = F'(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + F''(\alpha + \beta\sqrt{-1})\,d\beta\sqrt{-1} \end{aligned}$$

se réduisissent l'un et l'autre à

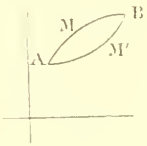
$$F'(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

c'est-à-dire que $F''(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ ne fût pas infini, et ainsi de suite.

Ainsi, deux chemins terminés aux mêmes extrémités pourront se substituer l'un à l'autre, si le premier peut se transformer insensiblement dans le second, sans que, dans ses formes intermédiaires, il passe jamais par un point où la fonction ou ses dérivées, à partir d'un certain ordre, deviendraient infinies.

Le théorème peut s'énoncer d'une autre manière. En

Fig. 7.



effet, si les valeurs de $\int y\,dx$, prises le long des chemins AMB (*fig.* 7) et AM'B, sont égales, la valeur de cette intégrale, prise le long du chemin fermé AMBM'A, sera nulle; en sorte que l'on peut dire qu'une intégrale $\int y\,dx$, prise le long d'un chemin fermé, est identiquement nulle, lorsque ce chemin fermé peut se réduire à un point unique, sans que, dans ses transformations successives, il passe jamais par un point où la fonction y

ou ses dérivées deviendraient infinies à partir d'un certain ordre.

On remarquera que l'un ou l'autre théorème n'a d'autre objet que de compléter la notion originelle d'une intégrale; car il est bien évident que, si une intégrale $\int y\,dx$ pouvait, les limites restant les mêmes, varier d'une manière continue avec le chemin qui relierait ces deux limites, cette intégrale, dès lors, n'aurait pas de sens.

Mais on comprend parfaitement que, de loin en loin, l'intégrale puisse s'accroître de quantités finies, lorsque le chemin se déforme assez considérablement; quant à ces quantités finies, elles ne peuvent être que des constantes, par la raison, que nous avons déjà dite, que l'intégrale

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} y\,dx,$$

prise entre les mêmes limites, conserve toujours la même dérivée, qui est la valeur de la fonction à la limite supérieure de l'intégrale.

On peut présenter le théorème de Cauchy d'une façon plus avantageuse : Si l'on établit entre les variables α, β, α' et β', une relation arbitraire

$$\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0,$$

cette relation, jointe aux deux dans lesquelles se décompose

$$f(\alpha - \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

fera de chacune des quatre variables une fonction de celle que l'on voudra des trois autres; d'un autre côté, l'intégrale

$$\int y\,dx = \int(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})(d\alpha - d\beta\sqrt{-1})$$

se décomposera en quatre autres

$$\int \alpha' d\alpha, \quad -\int \beta' d\beta, \quad \sqrt{-1}\int \beta' d\alpha \quad \text{et} \quad \sqrt{-1}\int \alpha' d\beta,$$

dans chacune desquelles on pourra considérer la variable finie comme une fonction de la variable dont la différentielle entre sous le même signe d'intégration; or il est facile de comprendre comment chacune des quatre intégrales pourrait n'acquérir qu'une valeur finale nulle, quand même la variable x serait revenue à sa valeur initiale, sans avoir repassé par la même série de valeurs.

Supposons, par exemple, que, au lieu d'une relation $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = 0$, entre les quatre variables, on en ait choisi une $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, entre α et β seulement, figurée par la courbe AB (*fig.* 8).

Fig. 8.

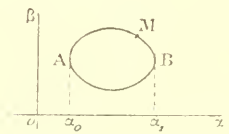
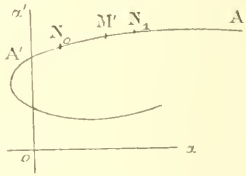


Fig. 9.



Il en résultera, entre α' et α, par exemple, une relation correspondante, figurée par une courbe telle que A'A (*fig.* 9).

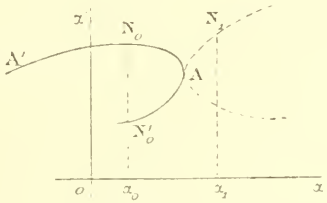
Soient M et M' deux points correspondants de ces deux courbes, c'est-à-dire ayant la même abscisse α : dans l'hypothèse de la figure, $\int \alpha' d\alpha$ sera identiquement nulle, parce que, tandis que le point $[\alpha, \beta]$ fera le tour de la courbe AMB, c'est-à-dire tandis que α variera de sa valeur minimum α_0 à sa valeur maximum α_1 et reviendra de α_1 à α_0, le point $[\alpha', \alpha]$ ne pourra décrire, sur A'A, que l'arc N_0N_1, dont les extrémités auraient

pour abscisses α_0 et α_1, et ensuite l'arc N_1N_0, de façon que l'aire engendrée dans l'aller serait détruite dans le retour.

Pour que l'aire $\int \alpha' d\alpha$ ne fût pas nulle, il faudrait que le point $[\alpha', \alpha]$ eût pu passer sur une autre branche de A'A que celle où se trouvait le point de départ, comme dans le cas de la *fig.* 10, où le point $[\alpha', \alpha]$ aurait parcouru le chemin N_0AN_1 dans l'aller et le chemin $N_1AN'_0$ dans le retour; c'est-à-dire qu'il faudrait que $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$ fût devenu infini dans l'intervalle de α_0 à α_1.

Il en serait de même des trois autres intégrales : on arrive ainsi à une nouvelle expression de la condition pour qu'on puisse substituer un chemin à un autre, sans que l'intégrale change : au lieu de dire que, dans ses formes intermédiaires, le chemin ne doit passer par aucun point où $\frac{dy}{dx}$ devienne infini, on peut dire que le

Fig. 10.

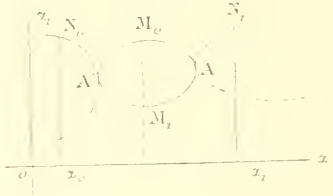


chemin variable doit rester tel que $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$, $\frac{d\beta'}{d\alpha}$, $\frac{d\alpha'}{d\beta}$ ni $\frac{d\beta'}{d\beta}$ ne deviennent infinis.

Il est aussi très aisé, dans cette nouvelle conception, de se rendre compte des conditions dans lesquelles l'intégrale $\int y\,dx$ peut s'accroître de quantités constantes dans un parcours fermé par rapport à x, c'est-à-dire lorsque α et β reviennent à leurs valeurs initiales, sans repasser par la même suite de valeurs.

Reprenons l'exemple de l'intégrale $\int \alpha' d\alpha$, et supposons que la courbe, dont les coordonnées sont α' et α,

Fig. 11.



présente un anneau fermé compris entre les valeurs extrêmes α_0 et α_1 de α, comme l'indique la *fig.* 11.

Si l'on fait partir α de la valeur de l'abscisse du point M_0, qu'on le fasse croître jusqu'à sa valeur extrême α_1, abscisse de N_1, qu'on le fasse ensuite décroître de α_1 à l'abscisse du point M_0 ou du point M_1, mais qu'on suppose que, durant ces variations de α, le point $[\alpha', \alpha]$ ait parcouru le chemin $M_0 A N_1 A M_1$, l'intégrale $\int \alpha' d\alpha$ aura pris la valeur de l'aire $M_0 A M_1$.

Cette aire dépendra de la valeur initiale de l'abscisse du point de départ, M_0 : mais aussi α' ne sera pas revenu à sa valeur initiale, l'ordonnée de M_0.

Au contraire, si l'on faisait revenir α à sa valeur initiale, l'abscisse de M_0, en supposant que, après être arrivé à sa valeur extrême supérieure α_1, il fût revenu à sa valeur extrême inférieure α_0, pour reprendre ensuite sa valeur initiale, l'abscisse de M_0, et que, durant ce parcours, le point $[\alpha', \alpha]$ eût décrit les arcs $M_0 A$, $A N_1$, $N_1 A$, $A M_1 A'$, $A' N_0$, $N_0 A'$, $A' M_0$, l'intégrale $\int \alpha' d\alpha$ aurait crû de l'aire comprise dans le contour $A' M_0 A M_1 A'$, indépendante de la position du point de départ M_0.

D'où l'on voit que l'intégrale $\int y\, dx$ ne peut s'accroître d'une constante, dans un parcours fermé par rapport à

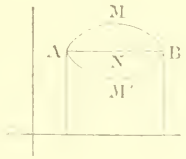
la variable x, qu'autant que la fonction y revient elle-même à sa valeur initiale, en même temps que la variable x.

DES PÉRIODES DES INTÉGRALES.

13. Tous les parcours se ramenant les uns aux autres, nous pouvions donc réduire les chemins à considérer à des chemins composés d'arcs des deux enveloppes et d'arcs de conjuguées; d'un autre côté, comme l'intégrale $\int y\,dx$ ne peut s'accroître de constantes que dans des chemins fermés, à la fois par rapport à la variable et à la fonction, nous rechercherons les périodes d'une intégrale dans les parcours d'anneaux fermés de la courbe réelle, de l'enveloppe imaginaire et des conjuguées.

Des périodes engendrées dans le parcours d'anneaux fermés de la courbe réelle. — Si la courbe réelle représentée par l'équation $f(x, y) = 0$ du lieu considéré comprend quelques anneaux fermés, tels que AMBM'A (*fig.* 12), l'intégrale quadratrice de ce lieu,

Fig. 12.



$\int y\,dx$, admettra évidemment pour périodes les aires enfermées respectivement dans ces différents anneaux fermés.

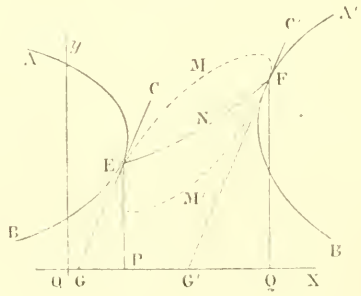
En effet, si le point $[x, y]$ parcourt un nombre quelconque de fois le chemin AMBM'A, l'intégrale $\int y\,dx$, durant le trajet AMB, s'augmentera de l'aire du dia-

mètre ANB, conjugué des cordes de l'anneau parallèles à l'axe des y, et de l'aire AMBNA comprise entre le demi-anneau supérieur et le diamètre, tandis que, dans le chemin BM'A, elle s'augmentera de l'aire, prise avec le signe —, du même diamètre et de l'aire BM'ANB, prise positivement, comprise entre la branche inférieure de l'anneau et le diamètre, aire d'ailleurs égale à la première, de sorte que, à la fin du parcours, l'aire engendrée sera celle comprise dans l'anneau AMBM'A.

Mais le parcours de la courbe réelle pourra donner lieu à la formation d'autres périodes qu'on n'apercevait pas tout d'abord et sur lesquelles nous reviendrons après avoir traité des périodes imaginaires engendrées dans le parcours des anneaux fermés de conjuguées.

Des périodes engendrées dans les parcours des anneaux fermés de conjuguées. — Le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans l'intérieur d'un anneau fermé d'une conjuguée quelconque d'un lieu $f(X, Y) = 0$ est l'une des périodes de la quadratrice $\int Y dX$ de ce lieu. En effet, soient AB, A'B' (*fig.* 13) deux branches de la

Fig. 13.



courbe réelle comprenant entre elles une série de conjuguées fermées, telles que EMFM'E; soit ENF le lieu

des milieux des cordes réelles de cette conjuguée parallèles aux deux tangentes EG, FG′ à la courbe réelle : l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long du chemin EMP se composera, d'après une des propositions qui précèdent :

De l'aire GENFG′G du diamètre ENF rapporté à l'ancien axe des X et à une parallèle aux cordes réelles de la conjuguée :

De l'aire réelle du triangle G′FQ, diminuée de l'aire aussi réelle du triangle GEP ;

Enfin, de l'aire EMFNE, comprise entre la demi-conjuguée et son diamètre, cette aire étant affectée du signe $+\sqrt{-1}$.

Mais si, arrivé en F, le point décrivant $[x, y]$ parcourt ensuite la branche inférieure FM′E de la conjuguée, dans ce nouveau parcours, l'intégrale $\int y\,dx$ s'accroîtra :

De l'aire FNEGG′F égale et de signe contraire à GENFG′G ;

De l'aire réelle du triangle GEP diminuée de l'aire aussi réelle du triangle G′FQ, lesquelles détruiront les aires des mêmes triangles, engendrées d'abord avec des signes contraires :

Enfin, de l'aire F′M′ENF égale à EMFNE et engendrée avec le même signe $+\sqrt{-1}$.

En sorte que, dans le parcours entier du contour EMFM′E, l'intégrale $\int y\,dx$ s'accroîtra seulement du produit par $\pm\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans l'anneau de la conjuguée, $\sqrt{-1}$ devant être affecté du signe + ou du signe —, suivant que le sens du mouvement aura été EMFM′E ou EM′FME.

Extension du second théorème d'Apollonius

$$\pi a' b' \sin\theta = \pi ab,$$

relatif aux coniques, aux courbes algébriques de tous les degrés. — Ce second théorème d'Apollonius, en ce qui concerne l'ellipse, ne constitue qu'un fait évident, puisqu'il signifie simplement que l'aire d'une ellipse reste la même, soit qu'on la rapporte à ses axes ou à deux de ses diamètres conjugués.

Mais, appliqué à l'hyperbole, ce même théorème signifie que toutes les ellipses conjuguées d'une même hyperbole ont même aire.

C'est ce théorème que nous allons étendre aux courbes algébriques de tous les degrés; il consiste en ce que les conjuguées fermées d'un même lieu, comprises entre les mêmes branches de la courbe réelle, ont toutes même aire.

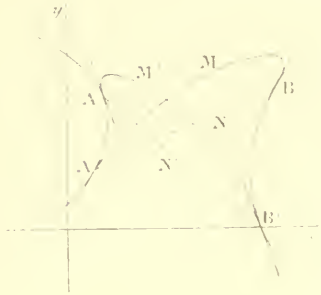
Ce théorème est pour ainsi dire évident; car, dans l'hypothèse contraire, l'intégrale $\int y\,dx$ aurait une infinité de périodes imaginaires, c'est-à-dire serait complètement indéterminée.

Mais le théorème de Cauchy en fournira une démonstration directe :

Soient AMBNA et A'M'B'N'A' (*fig.* 14) deux demi-conjuguées voisines, comprises entre les mêmes branches AA', BB' de la courbe réelle : les valeurs de l'intégrale $\int y\,dx$ prises d'abord le long du chemin AMB, ensuite le long du chemin AA'M'B'B seront égales, d'après le théorème de Cauchy; les parties imaginaires de ces deux valeurs seront donc les mêmes. Mais la seule partie imaginaire de la première somme sera l'aire AMBNA comprise entre la première demi-conjuguée et le diamètre ANB, lieu des milieux de ses cordes

réelles; de même dans la seconde somme, la seule partie imaginaire sera l'aire A'M'B'N'A' comprise entre la

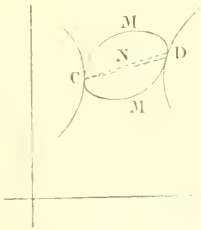
Fig. 14.



seconde demi-conjuguée et le diamètre A'N'B', lieu des milieux de ses cordes réelles; donc les demi-aires des deux conjuguées seront égales.

Nouvelle généralisation du même théorème. — Non seulement toutes les conjuguées fermées comprises entre les mêmes branches de la courbe réelle ont même aire, mais encore si l'on rejoignait deux points quelconques C et D (*fig.* 15) de ces deux branches par un chemin

Fig. 15.



quelconque CMD, et qu'on le fermât par le lieu DM'C des points imaginaires conjugués de ceux qui consti-

tueraient CMD, l'aire CMDM'C serait encore égale à celle d'une quelconque des conjuguées. En effet, si l'on se reporte à ce qui a été dit de la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$ prise le long d'un arc de l'enveloppe imaginaire, mais qui conviendrait également à la valeur de la même intégrale prise le long d'un chemin quelconque, en appliquant les formules, trouvées alors, aux deux arcs CMD et CM'D. On aura

$$I = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} - \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}$$

et

$$I' = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} - \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1},$$

S_1 désignant l'aire du lieu CND des milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués des deux arcs CMD et CM'D, S et S' les aires des segments correspondant aux arcs CMD et CM'D.

Mais l'intégrale prise le long de DM'C étant égale et de signe contraire à l'intégrale prise le long de CM'D, l'intégrale le long de CMDM'C sera la différence entre I et I' ou $(S - S')\sqrt{-1}$, c'est-à-dire le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enveloppée par l'anneau CMDM'C.

D'un autre côté, le chemin CMDM'C pouvant être considéré comme une déformation du chemin constitué par une conjuguée fermée, les intégrales prises le long de l'un et l'autre seront égales; donc le contour CMDM'C, constitué comme on l'a dit, enveloppera une aire égale à celle d'un anneau fermé de conjuguée compris entre les mêmes branches de la courbe réelle.

Si les deux parties CMD et CM'D n'étaient plus formées de points imaginaires conjugués deux à deux, l'intégrale prise le long de CMDM'C n'en resterait pas moins l'une des périodes de $\int y\,dx$, mais elle n'aurait

plus une représentation géométrique simple parce que S_1 n'aurait pas la même valeur dans I et dans I', et que, d'ailleurs, les aires S et S' qui entrent dans I ne seraient plus les mêmes que celles qui entrent dans I'.

Des périodes engendrées dans le parcours des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire des conjuguées. — Il pourra se présenter trois cas distincts : le premier où l'un des anneaux fermés étant constitué par des points $[x = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}]$, les points imaginaires conjugués de ceux qui constituent le premier, $[x = \alpha - \beta\sqrt{-1},\ y = \alpha' - \beta'\sqrt{-1}]$, formeraient un autre anneau fermé, séparé du premier. C'est ce qui arrive dans le lieu

$$[(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2-(r-r'\sqrt{-1})^2]$$
$$\times[(x-a-b\sqrt{-1})^2-(y-a'-b'\sqrt{-1})^2-(r-r'\sqrt{-1})]^2=0,$$

où l'enveloppe imaginaire présente les deux anneaux fermés, conjugués, représentés en coordonnées réelles par les équations

$$(x-a-b)^2+(y-a'-b')^2-(r-r')^2$$

et

$$(x-a+b)^2-(y-a'-b')^2-(r-r')^2.$$

Il pourra arriver aussi que l'enveloppe imaginaire, fermée, se compose de points imaginaires conjugués deux à deux, mais de telle façon que cette enveloppe ne touchant pas la courbe réelle, qui pourra d'ailleurs ne pas exister, les deux suites de points imaginaires conjugués, qui constitueront cette enveloppe, ne se rejoindront jamais, de sorte que le premier point de la première partie de l'enveloppe coïnciderait avec le dernier point de la seconde partie et le dernier point de la première avec le premier de la seconde. C'est ce qui

arrive, par exemple, dans le cas de l'ellipse imaginaire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Enfin, si les deux parties de l'anneau considéré, de l'enveloppe imaginaire, se rejoignaient sur la courbe réelle en deux points d'inflexion de cette courbe, les points imaginaires conjugués, qui constitueraient l'anneau de l'enveloppe, se rejoindraient aux deux points d'inflexion.

Dans le premier cas, les valeurs de l'intégrale $\int y\,dx$, prise successivement le long des deux anneaux considérés, seraient représentées par

$$I = 2S_1 - \frac{S + S'}{2} + \frac{S - S'}{2}\sqrt{-1}$$

et par

$$I' = 2S_1 - \frac{S + S'}{2} - \frac{S - S'}{2}\sqrt{-1},$$

S_1, S et S' ayant les valeurs définies plus haut.

Ainsi, par exemple, dans le cas du lieu

$$(x - a - b\sqrt{-1})^2 + (y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2,$$

le lieu des points milieux des cordes joignant les points imaginaires conjugués des enveloppes des deux lieux

$$(x - a - b\sqrt{-1})^2 + (y - a' - b'\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

et

$$(x - a + b\sqrt{-1})^2 + (y - a' + b'\sqrt{-1})^2 = (r - r'\sqrt{-1})^2$$

sera, comme on l'a vu, la circonférence du cercle

$$(\alpha - a)^2 + (\alpha' - a')^2 = r^2,$$

de sorte que S_1 aura pour valeur

$$\pi r^2;$$

d'un autre côté, les deux enveloppes ayant pour équations, en coordonnées réelles,

$$(x-a-b)^2-(y-a'-b')^2=(r-r')^2$$

et

$$(x-a-b)^2-(y-a'-b')^2=(r-r')^2,$$

S aura pour valeur $\pi(r+r')^2$, et S' aura pour valeur $\pi(r-r')^2$.

La formule

$$I=2S_1-\frac{S-S'}{2}+\frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}$$

donnera donc, pour valeur de la période de l'intégrale $\int y\,dx$, relative au premier lieu,

$$2\pi r^2-\tfrac{1}{2}\pi[(r+r')^2-(r-r')^2]$$
$$+\tfrac{1}{2}\pi[(r+r')^2-(r-r')^2]\sqrt{-1}=\pi(r+r'\sqrt{-1})^2,$$

comme on devait s'y attendre. La période, dans ce cas et tous les autres analogues, sera en partie réelle et en partie imaginaire.

Dans le second cas, les deux parties de l'enveloppe imaginaire, qui contiendront les points imaginaires conjugués deux à deux, se faisant suite l'une à l'autre, de manière que le dernier point de l'un des deux arcs coïncide avec le premier point de l'autre, l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'anneau formé par l'enveloppe, aura pour valeur la somme des deux intégrales I et I'; c'est-à-dire

$$4S_1-(S-S').$$

La période sera donc réelle et égale à l'aire de l'an-

neau diminuée de quatre fois l'aire du segment correspondant au lieu des milieux des cordes joignant deux à deux les points imaginaires conjugués de l'anneau de l'enveloppe.

Toutefois, il pourra, je crois, arriver que le lieu des milieux des cordes réelles en question, ne présentant qu'un seul arc, dans l'intérieur de l'anneau de l'enveloppe, et cet arc devant être parcouru deux fois, en sens contraires, lors des formations des deux intégrales I et I', les aires $2S_1$ et $-2S_1$, que devraient contenir I et I', disparaîtraient de la somme $I + I'$.

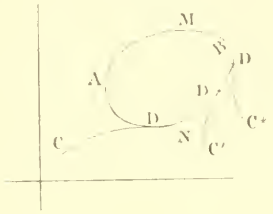
Dans le cas de l'ellipse imaginaire $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, S_1 est nul de lui-même, parce que toutes les cordes réelles de l'enveloppe imaginaire ont leurs milieux à l'origine, et il reste seulement, pour $I + I'$, l'aire de l'ellipse réelle $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, homothétique à l'ellipse imaginaire.

Dans le dernier cas, l'intégrale rentrera dans le cas général d'une intégrale, prise le long d'un chemin fermé composé de points imaginaires conjugués deux à deux, qui se rejoindraient sur la courbe réelle : cette intégrale aura, comme on l'a vu, pour valeur le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans l'anneau de l'enveloppe imaginaire.

14. *De la manière la plus générale dont s'engendrent les périodes correspondant aux parcours des anneaux fermés de l'une des deux enveloppes.* — Il n'est pas nécessaire que le point décrivant $[x, y]$ passe même une seule fois sur l'un de ces anneaux, pour que s'engendre la période qui correspondrait à son parcours. En effet, soit AMBNA (*fig.* 16) l'un de ces anneaux : supposons que les deux limites $[x_0, y_0]$, $[x, y]$ de l'inté-

grale $\int y\,dx$ appartiennent à deux conjuguées CD, C′D′, tangentes en D et D′ à l'anneau AMBNA, et représentent les points C et C′ des deux conjuguées : l'intégrale $\int y\,dx$, à la différence près des expressions algébriques des aires des triangles introduits par les changements de direction de l'axe des y en C, D, D′ et C′, se composera de l'aire, en partie réelle et en partie imaginaire, du segment de la conjuguée CD, compris entre l'arc CD, l'axe des x et les cordes réelles de la conjuguée CD,

Fig. 16.



menées en C et en D ; de la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'arc DD′ de l'enveloppe ; enfin, de l'aire, en partie réelle et en partie imaginaire, du segment de la conjuguée D′C′, compris entre l'arc D′C′, l'axe des x et les cordes réelles de la conjuguée D′C′, menées en D′ et C′.

Si, la limite inférieure $[x_0, y_0]$ restant fixe, la limite supérieure $[x, y]$ se transportait de C′ en C″ sur la conjuguée C″D″, la première partie de l'intégrale resterait fixe, la seconde s'accroîtrait de la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de l'arc D′D″ de l'anneau considéré de l'enveloppe, enfin la troisième varierait en raison de la substitution de l'arc D″C″ à l'arc D′C′.

Supposons maintenant que, la limite supérieure continuant à se mouvoir dans le même sens, le point D″ s'avance sur l'arc DND′D″BMAD, de façon à rejoindre à la fin le point D, en même temps que le point C″ re-

viendrait au point C, l'accroissement total de l'intégrale $\int y\,dx$ se réduira à la valeur de l'intégrale prise le long de l'anneau DNBMAD de l'enveloppe.

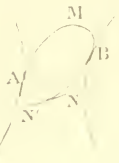
C'est de cette façon, en général, que s'engendrent les périodes relatives aux parcours des anneaux fermés des deux enveloppes.

Au reste, le multiple, sous lequel chaque période devra entrer dans la valeur de l'intégrale, sera marqué par le nombre de fois que la limite supérieure aura passé successivement et dans le même ordre sur toutes les conjuguées tangentes à l'anneau correspondant.

15. *De la manière la plus générale dont s'engendrent les périodes correspondant aux parcours des anneaux fermés des conjuguées.* — Nous avons vu que le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire enfermée dans un anneau, composé de points imaginaires conjugués deux à deux, qui se rejoignent sur les deux branches de la courbe réelle entre lesquelles sont comprises des conjuguées fermées d'une même catégorie, constitue une période égale à celle qui s'engendrerait dans le parcours d'une de ces conjuguées fermées; mais, comme nous l'avons également remarqué, il n'est pas nécessaire, pour que la même période s'engendre, que les deux arcs de l'anneau fermé, qui ont leurs extrémités sur les deux branches de la courbe réelle, soient composés de points imaginaires conjugués deux à deux. En effet, si AMBNA (*fig.* 17) est tel que les points de AMB et de ANB soient deux à deux imaginaires conjugués, on pourra toujours, d'après le théorème de Cauchy, substituer au chemin BNA, par exemple, un autre chemin voisin BN'A, ce qui n'altérera pas l'intégrale, et le chemin AMBN'A ne sera plus composé de points imaginaires conjugués deux à deux; la valeur de l'intégrale, le long de ce nouveau parcours

AMBN'A, n'en restera pas moins égale au produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire entourée par une des conjuguées fermées;

Fig. 17.

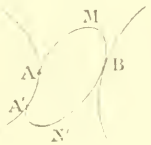


toute la différence sera que cette valeur de l'intégrale n'aura plus une relation simple avec les aires des segments correspondants aux arcs AMB et AN'B.

C'est ainsi, généralement, que s'engendrent les périodes qui représentent les produits par $\sqrt{-1}$ des aires enveloppées par les anneaux fermés de conjuguées.

Quant au multiple entier, sous lequel chacune des périodes de ce genre devrait entrer dans la valeur de

Fig. 18.



l'intégrale, il se comptera par le nombre de fois que le chemin suivi par le point mobile $[x, y]$ aura successivement touché les deux branches de la courbe réelle, sans rebroussement; car, si le chemin ne se fermait pas, comme dans le parcours AMBN'A' (*fig.* 18), la période imaginaire n'en serait pas moins complète, puisqu'en fermant le parcours, par l'addition du chemin A'A, on n'ajouterait rien à la partie imaginaire de l'intégrale.

16. *Sur une forme géométrique singulière que peuvent affecter les périodes engendrées dans le parcours d'une des enveloppes.* — Chacune des périodes imaginaires, engendrées dans le parcours des conjuguées, a toujours une infinité de représentations géométriques, sous la forme des aires des anneaux fermés de ces conjuguées : tandis que les périodes, engendrées dans le parcours de l'une ou l'autre enveloppe, n'en ont jamais qu'une chacune ; d'où il résulte que les premières sont toujours beaucoup mieux représentées que les autres.

Parmi les formes géométriques des périodes de la première espèce, il s'en trouve toujours de singulières : ce sont celles des anneaux qui dégénèrent en branches infinies, lorsqu'on fait tendre la caractéristique de la conjuguée vers le coefficient angulaire de l'une des asymptotes aux branches de la courbe réelle qui comprennent entre elles les anneaux de ces conjuguées.

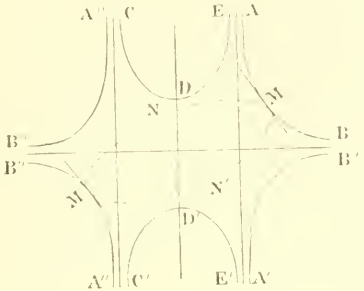
On pourrait toujours éviter la considération d'une conjuguée ainsi déformée, puisqu'on aurait à sa disposition une infinité d'autres anneaux fermés se prêtant beaucoup mieux, par exemple, à une quadrature approchée.

Il n'en sera naturellement plus de même si c'est l'une des périodes engendrées dans le parcours de l'une ou l'autre enveloppe, qui se présente sous une forme géométrique singulière, puisqu'il n'en existera pas d'autre représentation. Il importe donc de pouvoir reconnaître ces périodes sous leur figure exceptionnelle.

Mais nous donnerons d'abord un exemple de ce qui vient d'être dit : considérons l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ qui donne l'aire de la courbe $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, figurée en $ABA'B'A''B''A'''B'''$: cette courbe est du quatrième degré, si on lui mène deux tangentes parallèles en M et en M',

une droite quelconque parallèle à ces deux tangentes et comprise entre elles, ne coupera la courbe réelle qu'en deux points; il se trouvera donc, entre ces deux tangentes, un anneau fermé de la conjuguée, dont la caractéristique serait le coefficient angulaire des deux tan-

Fig. 19.



gentes. Le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire, enfermée dans cet anneau MNM'N', sera une période de l'intégrale.

L'anneau MNM'N' s'allongerait indéfiniment si la direction commune des deux tangentes tendait à devenir parallèle à l'axe des y et, à la limite, cet anneau dégénérerait dans la courbe à branches infinies CDEE'D'C', dont l'équation en coordonnées réelles serait

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

de sorte que l'aire MNM'N' se transformerait dans l'aire égale, comprise entre les deux branches CDE, C'D'E' et leurs asymptotes CC' et DD'.

Considérons maintenant l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$: les limites étant supposées les mêmes de part et d'autre, les deux intégrales auront les mêmes valeurs, au facteur

$\sqrt{-1}$ près; si la période de la première est le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire CDEE'D'C', celle de l'autre sera égale à cette même aire considérée comme réelle.

Mais la période imaginaire de la première intégrale aura une infinité de représentations géométriques, tandis que la période réelle de la seconde n'en a qu'une, exceptionnelle.

L'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\arcsin x$, dont la période est 2π; et 2π représente l'aire CDEE'D'C' ou celle qu'enveloppe l'anneau MNM'N'N.

17. *Condition pour que l'aire comprise entre une branche de courbe et son asymptote soit finie.* — Les considérations précédentes nous amènent à rechercher la condition pour que l'aire comprise entre une courbe et son asymptote soit finie.

Supposons qu'on ait pris l'asymptote pour axe des y; l'équation de la courbe, supposée résolue par rapport à y, sera

$$y = \frac{\varphi(x)}{x^\alpha};$$

$\varphi(x)$ ne devenant ni nul ni infini pour $x = 0$.

L'intégrale quadratrice de la courbe sera

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{x^\alpha},$$

et l'aire de la courbe, comprise entre cette courbe et son asymptote, sera

$$\int_0^\varepsilon \frac{\varphi(x)\,dx}{x^\alpha},$$

ε étant aussi petit qu'on le voudra.

$\varphi(x)$ ne variera qu'infiniment peu de 0 à ε : on pourra

donc le remplacer par $\varphi(0) = A$, par exemple; l'intégrale se réduira ainsi à

$$A\int_0^z \frac{dx}{x^\alpha} = A\int_0^z x^{-\alpha}\,dx = A\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_0^z.$$

Si $1-\alpha$ est positif, ou si α est moindre que 1, l'intégrale aura pour valeur

$$A\frac{z^{1-\alpha}}{1-\alpha} - 0$$

et restera finie, tandis que si $1-\alpha$ est négatif, ou si α est plus grand que 1, l'intégrale acquerra une valeur

$$A\frac{z^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \infty,$$

et croîtra indéfiniment.

On sait du reste, par l'exemple de l'hyperbole du second degré, que, si $\alpha = 1$, l'intégrale prendra une valeur infinie.

La condition pour que l'aire reste finie est donc

$$\alpha < 1.$$

C'est ce qui arrive pour chacune des asymptotes des deux courbes, conjuguées l'une de l'autre,

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

La condition peut s'exprimer sous une forme préférable : elle signifie que

$$\frac{x\varphi(x)}{x^\alpha}$$

doit tendre vers 0 pour $x = 0$.

Mais x, dans ce qui précède, représente la distance

d'un point de la courbe à l'asymptote et $\frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}$ représente l'ordonnée de la courbe; or, si l'on fait intervenir un changement d'axes, la distance d'un point de la courbe à son asymptote changera simplement d'expression, et quant à l'ordonnée, restée infinie, du point de la courbe, elle sera simplement multipliée par un rapport de sinus, de sorte que si, dans un système d'axes, le produit de l'ordonnée, devenue infinie, d'un point d'une branche indéfinie d'une courbe, par la distance, évanouissante, d'un point de cette branche à son asymptote, tend vers zéro ou croît indéfiniment, il en sera de même dans tout autre système d'axes.

On pourrait donc, les axes étant quelconques et l'équation de l'asymptote à la branche de courbe considérée étant $y - cx - d = 0$, se borner à évaluer la limite vers laquelle tendrait le produit

$$y(y - cx - d),$$

lorsque x croîtrait indéfiniment : l'aire comprise entre la courbe et son asymptote serait finie ou infinie, selon que la limite trouvée serait nulle ou infinie.

Mais, lorsqu'il s'agit d'une courbe algébrique, la condition peut recevoir une expression géométrique très simple et dont l'existence sera toujours facile à vérifier.

L'équation d'une courbe algébrique ayant pour asymptote l'axe des y est de la forme

$$xy^{m-1} + (ax^2 + bx + c)y^{m-2} + \ldots = 0:$$

il s'agit d'exprimer la condition pour que le produit de x tendant vers zéro par y devenu infini tende vers zéro. Posons $xy = z$, d'où $y = \frac{z}{x}$, la relation entre z

et x sera

$$z^{m-1} + (ax^2 + bx + c)z^{m-2} + (dx^3 + ex^2 + fx + g)xz^{m-3} + \ldots = 0.$$

Cette équation, pour $x = 0$, a toujours au moins $(m - 2)$ racines nulles, qui sont les produits des $(m - 2)$ valeurs finies de y par x devenu nul; la dernière est c. Ainsi, pour que le produit de $x = 0$ par $y = \infty$ soit nul, il faut que $c = 0$, c'est-à-dire que l'asymptote coupe la courbe en trois points situés à l'infini.

Telle est la condition générale pour que l'aire comprise entre une courbe algébrique et son asymptote soit finie.

Mais cela suppose que la courbe n'ait pas d'autres asymptotes parallèles à celle que l'on considère. Dans le cas contraire, on trouverait par le même calcul qu'il faudrait que l'asymptote considérée coupât la courbe à l'infini en un nombre de points égal à 3 + le nombre des asymptotes parallèles à la première.

Corollaire. — Dans l'exemple qui nous a servi précédemment, des deux courbes $y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, conjuguées l'une de l'autre, les quadratrices avaient la même période, réelle dans l'une et affectée du signe $\sqrt{-1}$ dans l'autre. Le fait est évidemment général, parce que si une courbe a pour conjuguée une autre courbe, réciproquement, la seconde a pour conjuguée la première, et les anneaux fermés réels de l'une se retrouvent imaginaires dans l'autre.

Remarque. — Il n'y aurait pas lieu de rechercher des périodes imaginaires dans les aires des conjuguées qui ne toucheraient que l'enveloppe imaginaire, parce que ces conjuguées ne pourraient pas présenter d'an-

neaux fermés. En effet, on ne pourrait même pas leur mener de tangentes parallèles à leurs cordes réelles, car le point de contact d'une pareille tangente réunirait deux points imaginaires conjugués et serait, par conséquent, réel, c'est-à-dire appartiendrait à la courbe réelle.

18. *Des périodes cycliques ou logarithmiques.* — Il nous reste à parler d'une classe particulière de périodes, dont la théorie et la génération n'ont rien de particulier, mais qui s'expriment, dans tous les lieux, d'une façon exceptionnelle très simple. Ce sont les produits par $\sqrt{-1}$ des aires d'anneaux fermés qui se séparent des conjuguées auxquelles ils appartiennent, lorsque les caractéristiques de ces conjuguées tendent à venir se confondre avec les coefficients angulaires des asymptotes du lieu.

Si une asymptote d'une courbe algébrique de degré m coupe la courbe en $(m-2)$ points à distance finie, les deux branches correspondantes de la courbe se trouvent de part et d'autre de l'asymptote et la touchent à l'infini à ses deux extrémités opposées. Ces deux branches présentent chacune un certain nombre de points d'inflexion, à partir du dernier desquels chacune des branches ne formera plus qu'un arc dont les points se rapprocheront de plus en plus de l'asymptote. Si l'on conçoit à ces deux arcs terminaux deux tangentes parallèles, très peu inclinées sur la direction de l'asymptote, une parallèle quelconque à ces deux tangentes, et comprise entre elles, coupera le lieu, à distance finie, en des points infiniment peu éloignés de ceux où l'asymptote elle-même coupe déjà ce lieu à distance finie, c'est-à-dire en $m-2$ points. Mais il en manquera deux, situés à des distances plus ou moins grandes; d'où il faut conclure

que les deux tangentes comprendront entre elles un anneau de la conjuguée ayant pour caractéristique leur coefficient angulaire commun, anneau d'ailleurs complètement isolé des autres branches de la même conjuguée. Le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de cet anneau fermé sera une des périodes de la quadratrice de la courbe; c'en sera une période cyclique.

Tous ces anneaux ont même aire : le fait n'a pas besoin d'une nouvelle démonstration; mais à la limite ils deviennent des ellipses, dont l'aire constante peut être évaluée. Ces ellipses recouvrent deux fois l'asymptote, comme si l'équation de la courbe était du second degré et représentait une hyperbole.

En effet, si l'asymptote en question a été prise pour axe des y et que l'équation de la courbe soit

$$xy^{m-1} + (ax^2 + bx + c)y^{m-2} + \ldots = 0,$$

on a vu que le produit de x, tendant vers zéro par y devenu infini, a pour limite $-c$. Cela signifie que les deux branches de la courbe, asymptotes à l'axe des y, tendent à se confondre avec l'hyperbole du second degré

$$xy = -c,$$

et, par conséquent, que l'une des conjuguées du lieu tend à se confondre, dans une de ses parties, avec une conjuguée de l'hyperbole $xy = -c$. La coïncidence n'a lieu, il est vrai, que lorsque les cordes réelles de la conjuguée sont devenues parallèles à l'asymptote; mais, à ce moment, l'anneau considéré de la conjuguée devient une ellipse indéfiniment allongée et indéfiniment aplatie; d'un autre côté, l'aire enveloppée par cet anneau, tout en changeant de figure, a conservé la même valeur; on peut donc prendre pour cette valeur celle de l'aire

de l'ellipse, laquelle est $\pm 2\pi c$, de sorte que la période est

$$\pm 2\pi c\sqrt{-1}.$$

19. *Relation entre les m périodes cycliques d'un lieu de degré m.* — La quadratrice d'une courbe de degré m a, en général, m périodes cycliques; mais ces périodes ne sont pas indépendantes.

En effet, soit

$$(y - a_1 x - b_1)(y - a_2 x - b_2)\ldots(y - a_m x - b_m) + x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

l'équation de la courbe :

Si l'on voulait rendre nulle la période cyclique relative à l'asymptote $y - a_1 x - b_1 = 0$, il faudrait faire en sorte que cette asymptote coupât la courbe en $m - 3$ points seulement à distance finie; mais, en éliminant y entre l'équation de la courbe et $y = a_1 x + b_1$, on trouverait

$$x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1, a_1 + \frac{b_1}{x}\right) + x^{m-3}\ldots = 0;$$

de sorte que pour faire disparaître le terme en x^{m-2}, il faudrait faire en sorte que $\varphi_{m-2}(1, a_1)$ fût nul.

On pourrait bien ainsi faire disparaître $m - 2$ périodes cycliques en posant

$$\varphi_{m-2}\left(1, \frac{y}{x}\right) = k\left(\frac{y}{x} - a_1\right)\left(\frac{y}{x} - a_2\right)\ldots\left(\frac{y}{x} - a_{m-2}\right);$$

mais, pour en faire disparaître encore une, il faudrait faire $k = 0$, et alors la dernière disparaîtrait aussi.

Ainsi les m périodes cycliques de la quadratrice d'un lieu de degré m sont nécessairement liées entre elles par une relation telle que, si $m - 1$ d'entre elles sont nulles, la dernière l'est aussi.

Cette relation consiste en ce que *la somme des périodes cycliques est toujours nulle*, pourvu, bien entendu, qu'on en tire les expressions d'une même formule générale ; car, autrement, chacune d'elles pouvant recevoir le double signe $\pm\sqrt{-1}$, la somme totale ne serait pas déterminée.

Remarquons d'abord que, si l'équation de la courbe a été mise sous la forme

$$L(x-h)y^{m-1}+(Mx^2+Nx+P)y^{m-2}+\ldots=0,$$

les axes faisant entre eux un angle α, la période cyclique relative à l'asymptote $x=h$ sera exprimée par

$$\frac{2\pi(Mh^2+Nh+P)\sin\alpha}{L}\sqrt{-1}.$$

Cela posé, soit, en coordonnées rectangulaires,

$$\begin{aligned}(y-a_1x-b_1)(y-a_2x-b_2)\ldots(y-a_mx-b_m)\\ -x^{m-2}\varphi_{m-2}\left(1,\frac{y}{x}\right)-\ldots=0\end{aligned}$$

l'équation de la courbe : rendons l'axe des y parallèle à l'asymptote $y=a_1x+b_1$, sans changer l'origine, ni l'axe des x, les formules de transformation seront

$$x=x'+y\cos\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad y=y'\sin\alpha_1,$$

α_1 désignant l'angle dont la tangente est a_1.

La substitution donnera

$$\begin{aligned}(-a_1x'-b_1)[y'(\sin\alpha_1-a_2\cos\alpha_1)-a_2x'-b_2]\ldots\\ \times[y'(\sin\alpha_1-a_m\cos\alpha_1)-a_mx'-b_m]\\ +\varphi_{m-2}(x'+y'\cos\alpha_1,y'\sin\alpha_1)+\ldots=0;\end{aligned}$$

en conséquence, le coefficient de $x'y'^{m-1}$ sera

$$L=-a_1\cos^{m-1}\alpha_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_m).$$

Quant au terme en y'^{m-2}, qui proviendrait de

$$(-a_1x'-b_1)[y'(\sin\alpha_1-a_2\cos\alpha_1)-a_2x'-b_2]\ldots$$
$$\times[y'(\sin\alpha_1-a_m\cos\alpha_1)-a_mx'-b_m],$$

il disparaîtrait de lui-même, quand on y ferait

$$a_1x'+b_1=0,$$

il sera donc inutile de le transcrire.

Il reste à chercher la partie utile du coefficient de y'^{m-2} dans

$$\varphi_{m-2}(x'+y'\cos\alpha_1,\ y'\sin\alpha_1).$$

Ce coefficient est simplement

$$\varphi_{m-2}(\cos\alpha_1,\ \sin\alpha_1),$$

ou, à cause de l'homogénéité de cette fonction,

$$\cos^{m-2}\alpha_1\varphi_{m-2}(1,\ a_1).$$

La période cyclique relative à l'asymptote

$$y-a_1x-b_1=0$$

est donc

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}\cos^{m-2}\alpha_1\varphi_{m-2}(1,a_1)\sin\alpha_1}{-a_1\cos^{m-1}\alpha_1(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_m)}$$

ou, simplement,

$$-\frac{2\pi\sqrt{-1}\,\varphi_{m-2}(1,a_1)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_m)}.$$

Les autres s'exprimeraient de la même manière.

Mais un polynôme de degré $(m-2)$ est déterminé par $(m-1)$ substitutions et, d'après la formule de Lagrange,

$$\begin{aligned}\varphi_{m-2}(1,a)=\ &\varphi_{m-2}(1,a_1)\frac{(a-a_2)(a-a_3)\ldots(a-a_{m-1})}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_{m-1})}\\ &+\varphi_{m-2}(1,a_2)\frac{(a-a_1)(a-a_3)\ldots(a-a_{m-1})}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_1-a_{m-1})}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\varphi_{m-2}(1,a_{m-1})\frac{(a-a_1)\ldots(a-a_{m-2})}{(a_{m-1}-a_1)\ldots(a_{m-1}-a_{m-2})}.\end{aligned}$$

En remplaçant, dans cette identité, a par a_m, il vient

$$\begin{aligned}\varphi_{m-2}(1, a_m) = \quad & \varphi_{m-1}(1, a_1)\frac{(a_m - a_2)\ldots(a_m - a_{m-1})}{(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_{m-1})} \\ & + \varphi_{m-2}(1, a_2)\frac{(a_m - a_1)\ldots(a_m - a_{m-1})}{(a_2 - a_1)\ldots(a_2 - a_{m-1})} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \varphi_{m-2}(1, a_{m-1})\frac{(a_m - a_1)\ldots(a_m - a_{m-2})}{(a_{m-1} - a_1)\ldots(a_{m-1} - a_{m-2})},\end{aligned}$$

ou, en multipliant les deux termes de la première fraction du second membre par $(a_1 - a_m)$, les deux termes de la seconde par $(a_2 - a_m)$, ..., divisant les deux membres par

$$(a_m - a_1)(a_m - a_2)\ldots(a_m - a_{m-1}),$$

et, faisant tout passer dans le premier membre,

$$\sum \frac{\varphi_{m-2}(1, a_1)}{(a_1 - a_2)\ldots(a_1 - a_m)} = 0$$

ou

$$\sum \frac{\varphi_{m-2}(1, a_1)}{\varphi_m(1, a)_{a=a_1}} = 0.$$

C. Q. F. D.

20. Théorème. — *Les périodes cycliques de la quadratrice d'une courbe algébrique de degré m sont les produits par* $2\pi\sqrt{-1}$ *des racines d'une équation algébrique de degré m, manquant de second terme, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ceux de l'équation de la courbe.*

En effet, soit $2\pi\sqrt{-1}\,R$ l'une des périodes cycliques, R est donné par la formule

$$R = \frac{\varphi_{m-2}(1, a)}{\varphi_m a},$$

a désignant le coefficient angulaire de l'une des asym-

ptotes, racine de l'équation $\varphi_m(a) = 0$, de sorte que les valeurs de R seraient les racines de l'équation qu'on obtiendrait en éliminant a entre les équations

$$R = \frac{\varphi_{m-2}(1, a)}{\varphi'_m(a)} \qquad \text{et} \qquad \varphi_m(a) = 0.$$

Mais les coefficients de $\varphi_{m-2}(1, a)$ ne sont pas explicités dans l'équation de la courbe; car, dans ce qui précède, $\varphi_{m-2}(x, y)$ désigne la différence entre l'ensemble des termes de degré $(m-2)$ du premier membre de l'équation de la courbe, lesquels seuls sont connus d'avance, et l'ensemble des termes de degré $(m-2)$ du produit

$$(y - a_1 x - b_1)(y - a_2 x - b_2)\ldots(y - a_m x - b_m).$$

Mais l'expression générale d'un terme de degré $(m-2)$ de ce produit est

$$b_1 b_2 (y - a_3 x)(y - a_4 x)\ldots(y - a_m x)$$

ou

$$\frac{\varphi_{m-1}(1, a_1)\varphi_{m-1}(1, a_2)}{\varphi'_m(1, a_1)\varphi'_m(1, a_2)}(y - a_3 x)(y - a_4 x)\ldots(y - a_m x),$$

$\varphi_{m-1}(x, y)$ désignant l'ensemble connu des termes de degré $(m-1)$ du premier membre de l'équation de la courbe, telle qu'elle est donnée, de sorte que l'ensemble des termes que l'on cherchait est

$$\sum \frac{\varphi_{m-1}(1, a_1)\varphi_{m-1}(1, a_2)}{\varphi'_m(1, a_1)\varphi'_m(1, a_2)}(y - a_3 x)\ldots(y - a_m x).$$

Or les coefficients de cette fonction de x et de y seront des fonctions symétriques de $a_1, a_2, \ldots, a_m$; ils s'exprimeront donc rationnellement en fonction des coefficients de $\varphi_m(x, y)$; par conséquent, les coefficients de $\varphi_{m-2}(x, y)$

ou ceux de $\varphi_{m-2}(1, a)$ s'exprimeront aussi rationnellement en fonction des coefficients donnés de l'équation de la courbe.

Donc les coefficients de l'équation en R seront des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation donnée de la courbe proposée.

Ainsi la théorie des périodes cycliques est ramenée à celle des équations algébriques. On pourra savoir si la quadratrice d'une courbe a des périodes cycliques égales, si les quadratrices de deux courbes ont des périodes cycliques communes, etc. ([1]).

21. *Classification des quadratrices des courbes algébriques d'après le nombre et l'espèce de leurs périodes.* — D'après la théorie qui a été exposée dans ce qui précède, les périodes de l'intégrale quadratrice d'une courbe algébrique sont représentées par les aires d'anneaux fermés de la courbe réelle, des conjuguées de cette courbe ou de l'enveloppe imaginaire; mais les figures géométriques de ces anneaux ne dépendent pas du choix des axes : les périodes de l'intégrale quadratrice d'une courbe restent donc toujours les mêmes, quels que soient les axes auxquels cette courbe soit rapportée.

Nous savons dans quelles conditions les périodes cycliques peuvent disparaître.

D'un autre côté, si un anneau fermé de la courbe réelle ou d'une conjuguée devient accidentellement évanouissant, l'aire qu'il enveloppait sera nulle et la quadratrice de la courbe perdra une de ses périodes,

---

([1]) Ce dernier théorème ne se trouve pas dans ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires;* il n'a été publié qu'en 1876, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*

réelle dans le premier cas, et imaginaire sans partie réelle dans le second.

Dans l'un et l'autre cas, il se forme dans la courbe un point double réel. C'est évident dans le premier cas et facile à voir dans le second, parce qu'un anneau fermé de conjuguée est toujours tangent à la courbe réelle en deux points appartenant à deux branches distinctes et que ces deux points doivent forcément se réunir en un seul pour que l'anneau s'évanouisse. Nous avons démontré, en effet, que les conjuguées qui ne touchent que l'enveloppe imaginaire ne peuvent pas présenter d'anneaux fermés.

Le fait est encore facile à constater lorsqu'il s'agit d'un anneau fermé de l'enveloppe imaginaire, composé de points imaginaires conjugués deux à deux : lorsqu'un pareil anneau devient évanouissant, la période représentée par l'aire qu'il enveloppait disparaît, et en même temps il se forme un point double réel, réunion de deux séries de points imaginaires conjugués deux à deux.

Enfin, le cas, plus général, où deux périodes imaginaires conjuguées seraient liées à l'existence simultanée, dans l'enveloppe imaginaire, de deux anneaux composés chacun des points imaginaires conjugués de ceux qui formeraient l'autre, rentre encore dans les précédents, mais présente une particularité qui consiste en ce que les deux périodes ne peuvent disparaître qu'en même temps et par la formation simultanée de deux points doubles.

Supposons, s'il s'agissait d'une équation à coefficients imaginaires

$$P + Q\sqrt{-1} = 0,$$

qu'on l'ait complétée par l'addition du facteur

$$P - Q\sqrt{-1} = 0,$$

de façon à obtenir l'équation

$$P^2 + Q^2 = 0.$$

Les deux périodes imaginaires conjuguées seront représentées par les formules

$$I = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} + \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1}$$

et

$$I' = 2S_1 - \frac{S+S'}{2} - \frac{S-S'}{2}\sqrt{-1};$$

elles s'évanouiront en même temps si les anneaux dont les aires sont S et S' se réduisent à deux points imaginaires conjugués, parce que l'arc dont l'aire est S_1 se réduira alors aussi à un seul point; mais les deux points imaginaires conjugués où se seront concentrées les deux suites de points imaginaires conjugués qui constituaient les deux anneaux seront alors deux points doubles.

C'est ce qui arrive, par exemple, dans le système des deux cercles imaginaires conjugués, représentés par l'équation

$$\left[(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2-(r+r'\sqrt{-1})^2\right]$$
$$\times\left[(x-a+b\sqrt{-1})^2+(y-a'+b'\sqrt{-1})^2-(r-r'\sqrt{-1})^2\right]=0:$$

Les deux périodes sont

$$\pi(r+r'\sqrt{-1})^2 \quad \text{et} \quad \pi(r-r'\sqrt{-1})^2;$$

elles ne s'annulent ni l'une ni l'autre que pour $r=0$ et $r'=0$, mais alors le lieu acquiert deux points doubles,

$$\begin{cases} x = a + b\sqrt{-1}, \\ y = a' + b'\sqrt{-1}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x = a - b\sqrt{-1}, \\ y = a' - b'\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Remarque. — Les deux périodes I et I' s'évanouiraient arithmétiquement sans disparaître géométriquement si S, S' et S_1 satisfaisaient aux conditions

$$S - S' = 0 \quad \text{et} \quad 2S_1 - \frac{S + S'}{2} = 0;$$

mais ces deux conditions, fortuitement satisfaites, seraient d'ordre transcendant.

Ces périodes peuvent souvent disparaître dans des conditions analogues, sans que leur disparition entraîne la formation de points doubles, comme nous aurons occasion de le dire plus loin; mais ce n'est pas de ce genre de réduction dans le nombre des périodes que nous nous occupons ici. Nous cherchons à fixer les conditions dans lesquelles la valeur d'une période devient nulle en même temps que sa représentation géométrique devient évanouissante; et nous trouvons que, dans tous les cas, la condition consiste en ce qu'il se forme dans le lieu un ou deux points doubles, selon qu'il s'agit de faire disparaître une période réelle, ou imaginaire sans partie réelle, ou deux périodes imaginaires conjuguées.

22. *Les périodes de la quadratrice d'une courbe algébrique peuvent encore disparaître en devenant infinies.* — Lorsqu'un anneau de la courbe réelle se transforme en une branche parabolique, l'aire correspondante devient infinie et la quadratrice perd une période, parce qu'elle n'est plus exprimable.

Il en est de même lorsque l'une des deux branches de la courbe réelle, qui comprenaient des anneaux fermés de conjuguées, passant à l'infini, ces conjuguées deviennent paraboliques.

C'est ainsi que la quadratrice d'une conique perd sa

période et devient algébrique lorsque cette conique se transforme en parabole. Si l'on considère cette parabole comme dérivée de l'ellipse, l'aire de cette ellipse, qui formait la période réelle de la quadratrice, est devenue infinie et a disparu. Si, au contraire, on considère la parabole comme dérivée de l'hyperbole, une des branches de cette hyperbole a passé à l'infini, l'aire commune des conjuguées de cette hyperbole a grandi indéfiniment et la période imaginaire est devenue infinie.

Il en serait évidemment de même si des anneaux de l'enveloppe imaginaire d'un lieu devenaient paraboliques.

Mais la théorie des quadratrices des courbes paraboliques offre aujourd'hui des difficultés inabordables.

Ces courbes présentent, avec les courbes pourvues de points doubles à distance finie, cette analogie géométrique que ni les unes ni les autres n'ont jamais, eu égard à leur degré, le nombre maximum de tangentes parallèles à une direction donnée, et peut-être est-ce là le point de vue où il faudrait se placer pour en faire l'étude, car toute réduction dans ce nombre de tangentes en amène forcément une correspondante dans le nombre des anneaux fermés, mais il n'y a rien de fait à cet égard.

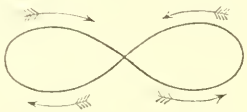
Nous ne nous occuperons donc plus des courbes paraboliques.

Au contraire, ce que nous nous proposons est de chercher, d'abord, le nombre des périodes de la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m et de voir ensuite comment elle pourrait les perdre toutes successivement, les coefficients de l'équation de la courbe n'étant alors liés entre eux que par le moindre nombre possible de conditions. En d'autres termes, nous voulons déterminer la courbe la plus générale de degré m, dont la quadrature serait algébrique.

23. *D'une réduction accessoire d'une nouvelle unité dans le nombre des périodes de la quadratrice, au moment de la formation d'un point double à distance finie dans la courbe correspondante.* — Cette réduction se produit nécessairement au moment de la formation d'un point double qui fait évanouir la représentation géométrique d'une période, parce que deux anneaux, entre lesquels était compris celui qui vient de se réduire à un point unique, viennent se confondre en un seul circuit, en forme de huit, où il n'est plus possible de distinguer les deux anneaux l'un de l'autre, la condition de continuité obligeant le point décrivant $[x, y]$ à parcourir les deux boucles en avançant toujours dans le même sens.

Il suffira d'établir le fait dans le cas le plus général, parce que les périodes de la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m devant, dans tous les cas particuliers, rester les mêmes fonctions des coefficients, si

Fig. 20.



l'on peut constater, dans un cas absolument général, que la formation d'un point double entraîne la disparition de deux périodes dans la quadratrice, on pourra conclure à la même coïncidence dans tous les cas particuliers.

Supposons que la courbe ait toutes ses asymptotes réelles et que ce soit un anneau fermé de la courbe réelle qui doive s'évanouir; menons à cet anneau deux tangentes parallèles qui n'aient la direction d'aucune asymptote : les conjuguées du lieu qui toucheront l'an-

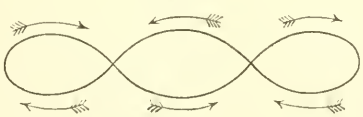
neau considéré aux points de contact des deux tangentes parallèles seront nécessairement fermées, quelque loin qu'ils s'étendent d'ailleurs, parce que la conjuguée à laquelle ils appartiendront, n'ayant pas d'asymptotes, n'aura pas de branches infinies; les produits par $\sqrt{-1}$ des aires de ces deux anneaux formeront deux périodes imaginaires de la quadratrice du lieu.

Mais, au moment où l'anneau de la courbe réelle s'évanouira en un point isolé, les deux anneaux de la conjuguée se rejoindront au point isolé et s'y couperont sous un angle, au lieu de s'y toucher, de sorte que les deux périodes, précédemment distinctes, se fondront en une seule égale à leur différence.

Il en serait évidemment de même si l'anneau qui devrait s'évanouir appartenait à une conjuguée et était, au contraire, compris entre deux anneaux fermés de la courbe réelle. Seulement les deux tangentes à la courbe au point double seraient alors réelles, au lieu d'être imaginaires.

Ainsi la formation d'un point double doit entraîner une réduction de deux unités dans le nombre des périodes. Le même fait, au reste, se reproduirait dans les mêmes conditions si, un huit s'étant déjà produit, il se formait un nouveau point double sur son pourtour. Seulement, au lieu de deux boucles, il s'en présenterait trois, en continuité entre elles.

Fig. 21.



Les trois boucles seraient, en tous cas, de même nature, c'est-à-dire toutes les trois réelles ou toutes les trois imaginaires.

En résumé, on doit admettre que la formation de p points doubles dans une courbe entraîne une réduction de $2p$ unités dans le nombre des périodes de sa quadratrice.

24. *Des autres conditions dans lesquelles peuvent se produire des réductions dans le nombre des périodes.* — D'autres réductions peuvent être amenées par beaucoup d'autres circonstances : ainsi une période représentée par l'aire d'un anneau en forme de *huit* disparaîtra lorsque les aires des deux boucles seront égales; deux périodes représentées par les aires des deux anneaux fermés de la courbe réelle se réduiront à une seule si ces aires sont égales, et il en sera de même si les anneaux fermés de conjuguées, compris entre des branches distinctes de la courbe réelle, présentent la même aire, etc.

C'est ainsi, par exemple, que la quadratrice de la courbe

$$y^3 + x^3 = a^3$$

ne comporte que deux périodes $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}$, ω désignant l'aire de l'anneau de la courbe réelle, compris entre les droites $x = \pm a$ et $y = \pm a$. Mais aussi, dans cet exemple, la courbe réelle, ses conjuguées à abscisses et à ordonnées réelles, et l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées se confondent géométriquement.

Mais, dans ces dernières circonstances, la disparition de chaque période manquante tiendra à la présence d'une relation particulière entre les coefficients de l'équation de la courbe, tandis que la relation unique qui introduit chaque point double entraîne une réduction de deux unités dans le nombre des périodes, de sorte que, à égalité dans le nombre des périodes restantes, la courbe dont l'équation contiendra encore le plus de paramètres

indépendants sera celle pour laquelle la disparition des périodes manquantes sera déterminée exclusivement par la formation de points doubles en nombre suffisant, c'est-à-dire en nombre p, s'il a disparu $2p$ périodes.

25. *Du nombre maximum de points doubles et du nombre maximum de périodes non cycliques.* — Si une courbe de degré m se résout en deux autres, l'une de degré $(m-q)$, et l'autre de degré q, n'ayant ni l'une ni l'autre de points doubles, le nombre des points doubles de la courbe composée sera

$$q(m-q);$$

si à son tour la courbe de degré q se résout en deux autres, de degrés $(q-r)$ et r, n'ayant pas de points doubles, la courbe décomposée présentera

$$(m-q)(q-r)+(m-q)r+r(q-r)=(m-q)q+r(q-r)$$

points doubles.

Il en résulte que, plus une courbe de degré m se segmente en courbes de degrés moindres, n'ayant pas de points doubles, plus elle présente de points doubles.

Le nombre maximum de points doubles que puisse présenter une courbe de degré m correspond donc au cas où elle dégénère en m droites, et ce nombre est

$$\frac{m(m-1)}{2}.$$

Il reste alors $2m$ coefficients indépendants dans l'équation de la courbe, au lieu de

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1;$$

les coefficients de la courbe satisfont donc alors à

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1 - 2m = \frac{m(m-1)}{2}$$

conditions.

Mais de ces $\frac{m(m-1)}{2}$ conditions, il y en a $(m-1)$ qui expriment que les m périodes cycliques sont nulles, puisqu'elles le sont en effet, et les

$$\frac{m(m-1)}{2} - (m-1) = \frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

autres expriment chacune la présence d'un point double dans la courbe.

Si l'on supprimait les $(m-1)$ conditions qui expriment que les m périodes cycliques sont nulles, lesquelles peuvent s'exprimer à part, les $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ conditions restantes exprimeraient encore la présence d'autant de points doubles, et, les $(m-1)$ premières étant retirées, la courbe redeviendrait irréductible.

Donc le nombre maximum de points doubles d'une courbe irréductible de degré m est

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

et, par conséquent, la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m comporte

$$(m-1)(m-2)$$

périodes non cycliques; si l'on rajoute les $(m-1)$ périodes cycliques, on obtient $(m-1)^2$ pour le nombre total des périodes de toute nature.

On conclut de cette théorie :

1° Qu'une courbe de degré m, qui présente

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

points doubles et que toutes ses asymptotes coupent chacune en trois points situés à l'infini, est quarrable algébriquement;

Qu'une courbe de degré m, qui présente

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

points doubles, mais dont les asymptotes sont quelconques, est quarrable par les fonctions circulaires inverses ou par les fonctions logarithmiques;

Qu'une courbe de degré m, qui présente

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1$$

points doubles, est quarrable par les fonctions circulaires inverses et par les fonctions doublement périodiques;

2° Que la courbe la plus générale de degré m, quarrable algébriquement, est celle qui présente

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

points doubles et que ses asymptotes coupent chacune en trois points à l'infini;

Que la courbe la plus générale de degré m, quarrable par les fonctions circulaires inverses, est celle qui présente $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles;

Que la courbe la plus générale de degré m, quarrable par les fonctions circulaires inverses et par les fonctions doublement périodiques, est celle qui présente

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1$$

points doubles, etc.

Mais il ne faudrait pas conclure, du mode de quadrabilité d'une courbe, au nombre de ses points doubles.

parce que, comme nous l'avons dit, le nombre des périodes peut se réduire dans toutes sortes de circonstances. Ainsi la courbe $y^4 + x^4 = a^4$ est quarrable par les fonctions à deux périodes, c'est-à-dire par les fonctions elliptiques, et cependant elle ne présente aucun point double.

26. *Détermination de la courbe la plus générale du troisième degré quarrable algébriquement.* — Les trois asymptotes de cette courbe doivent la couper chacune en trois points situés à l'infini, par conséquent elle doit avoir trois diamètres rectilignes, respectivement conjugués des cordes parallèles à ses trois asymptotes; ces diamètres seront, d'ailleurs, les médianes du triangle des asymptotes; la courbe doit, en outre, avoir un point double, lequel ne pourra se trouver qu'au point de rencontre des trois diamètres.

Son équation, rapportée à l'une des médianes, prise pour axe des x, au point double, pris pour origine, et à la parallèle à l'asymptote parallèle aux cordes conjuguées de l'axe des x, prise pour axe des y, est

$$y = \frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}},$$

a désignant la moitié du côté du triangle des asymptotes qui est parallèle à l'axe des y, et m le tiers de la médiane correspondant à ce côté pris pour base.

La quadratrice est

$$\frac{a}{6m}(x+3m)\sqrt{(x-m)(x+3m)}.$$

La courbe représentée par l'équation

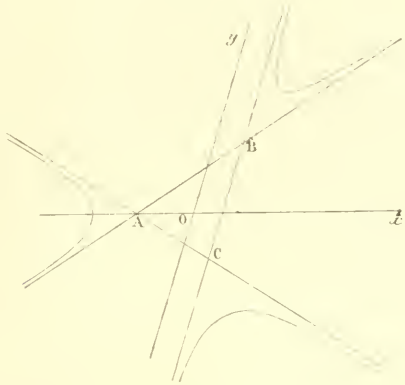
$$y = \frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}}$$

a la figure ci-jointe.

Je lui ai donné le nom de *trèfle*, à cause de sa forme :

toutes ses conjuguées, qui sont du sixième degré, sauf le folium de Descartes, sont également quarrables algébriquement. On savait depuis longtemps que le folium était quarrable algébriquement, mais on n'avait pas

Fig. 22.



l'explication du fait. On vérifiera aisément que les trois asymptotes de cette courbe la coupent aussi chacune en trois points situés à l'infini; seulement deux d'entre elles sont imaginaires.

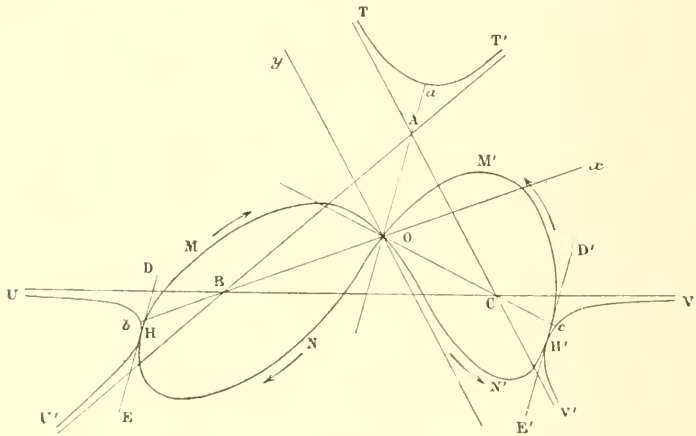
Cet exemple est très propre à faire toucher du doigt bien des choses que j'ai énoncées comme évidentes, parce qu'elles le sont en effet, mais qui paraissent avoir été peu comprises.

La démonstration, entre autres, de ce théorème que la formation d'un nouveau point double dans une courbe algébrique entraîne une réduction de deux unités dans le nombre des périodes de la quadratrice, cette démonstration d'un fait, pourtant si imprévu, n'a excité aucun intérêt, parce que l'analyse pure ne peut pas fournir, par elle-même, une notion exacte de la continuité et que les analystes cultivent généralement très peu la Géométrie.

Il est facile de montrer combien étaient mal fondées les préventions avec lesquelles ma démonstration a été reçue.

Menons au trèfle $TaT'UbU'VcV'$ deux tangentes parallèles DE, D'E', dont la direction soit celle d'une droite comprise dans l'intérieur de l'angle A, par exemple, du triangle BAC des asymptotes; une parallèle à ces deux tangentes et comprise entre elles ne coupera la courbe qu'en un seul point réel; les deux tangentes

Fig. 23.



DE, D'E' comprendront donc entre elles une conjuguée du trèfle; cette conjuguée sera fermée de toutes parts, ce qui était prévu, les trois asymptotes de la courbe réelle étant réelles. Soit C la caractéristique de cette conjuguée ou le coefficient angulaire commun de DE, D'E'; la conjuguée C passera au point double O; les éléments du lieu en ce point O seront fournis par l'équation

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{a}{3m}\sqrt{3}\sqrt{-1}:$$

les coefficients angulaires des tangentes à la conjuguée C, au point O, seront donc, d'après une formule connue,

$$= \frac{a}{m\sqrt{3}} + \frac{\frac{2a^2}{3m^2}}{\pm \frac{a}{m\sqrt{3}} - C}.$$

En conséquence, les branches de la conjuguée considérée se couperont au point O sous un angle et elles formeront une boucle en forme de huit; cette conjuguée aura une forme telle que celle qu'indique la figure; si l'Algèbre entendait la continuité autrement que moi, si elle la comprenait, par exemple, comme l'ont comprise MM. Cauchy et Puiseux, dans leur théorie de la série de Taylor; ou si l'Algèbre considérait le chemin ONHMO comme fermé, sous le prétexte que le point mobile $[x, y]$, parti de O, serait revenu en O, c'est-à-dire que la fonction y et sa variable x seraient en même temps revenues à leurs valeurs initiales, mais sans que les dérivées initiales et finales de tous les ordres, de la fonction y, fussent les mêmes au départ et à l'arrivée, l'intégrale

$$\int \frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}}$$

admettrait pour période le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de la boucle HMONH; elle admettrait de même pour période le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de la boucle OM'H'N'O; mais, cette intégrale étant algébrique n'a pas de périodes; donc l'Algèbre entend la continuité comme je l'ai entendue partout dans la théorie de la série de Taylor, comme dans la théorie des intégrales.

Maintenant, pourquoi la quadratrice du trèfle est-elle algébrique, quoique ses conjuguées soient toutes fermées, sauf celles dont les cordes réelles sont parallèles

aux trois directions asymptotiques et qui sont des foliums? C'est parce que les deux boucles de l'une quelconque d'entre elles, même des trois qui sont des foliums, entourent des aires égales, comme on le vérifierait aisément, puisqu'on a la formule de quadrature et que c'est le produit par $\sqrt{-1}$ de la différence de leurs aires qui forme la période; parce que la continuité exige que les deux boucles soient parcourues dans le sens indiqué par les flèches, ou dans le sens contraire.

Quant à la raison pour laquelle les deux aires ONHMO et ON'H'M'O sont égales, dans le cas actuel, elle est facile à donner : si l'on déformait infiniment peu la courbe, de manière, d'une part, à supprimer le point double, qui serait alors remplacé par un petit anneau réel, et, de l'autre, à faire en sorte que les trois asymptotes cessassent d'être d'inflexion, en premier lieu, la conjuguée ONHMON'H'M'O se segmenterait en deux anneaux séparés, compris, l'un entre la branche UU' et l'anneau réel, qui aurait remplacé le point double, l'autre compris entre ce même anneau réel et la branche VV'; en second lieu, les aires enveloppées par les deux anneaux de la conjuguée cesseraient d'être égales; mais, en troisième lieu, la quadratrice de la courbe ne comportant que deux périodes elliptiques, la différence des deux aires en question, lorsqu'elle réexisterait, ne pourrait être que l'aire correspondant à l'une des trois périodes cycliques.

La réapparition du point double, non accompagnée de l'annulation des trois périodes cycliques, aurait alors pour effets, d'abord, de réduire à néant la période elliptique réelle; en second lieu, de réduire à une seule apparence les deux figures de la période ultracyclique imaginaire; en troisième lieu, de supprimer, par soustraction, la partie commune, elliptique, des deux repré-

sentations de la période ultracyclique imaginaire; enfin de ne laisser subsister, à la place des deux figures de la période ultra cyclique imaginaire, qu'une forme accessoire de l'une des périodes cycliques.

Sur la rectification des courbes planes.

Les intégrales rectificatrices de l'enveloppe réelle et de l'enveloppe imaginaire réalisée d'un même lieu ont les mêmes périodes, au facteur $\sqrt{-1}$ près.

La période réelle de la rectificatrice d'une hyperbole est la différence entre la longueur totale de cette hyperbole et la longueur totale de ses asymptotes (les extrémités ayant mêmes abscisses); la période imaginaire de la même rectificatrice est le produit par $\sqrt{-1}$ de la différence entre la longueur totale de l'hyperbole supplémentaire et la longueur totale des asymptotes communes.

Ces deux derniers théorèmes s'étendent aux courbes de tous les ordres, en y considérant les différents cycles fermés, composés de branches convenablement groupées des deux enveloppes et de leurs asymptotes communes.

Les démonstrations de ces théorèmes se trouvent dans le Tome II de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires;* elles n'ont pas été données aux Conférences.

27. *Précis d'une théorie rationnelle des fonctions circulaires directes et inverses.* — Si l'on pose

$$S = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

y sera par définition le sinus de S et S l'arc dont le sinus

est y ; $x = \sqrt{1 - y^2}$ sera le cosinus de S et S l'arc dont le cosinus est $x = \sqrt{1 - y^2}$; $\frac{y}{x}$ sera la tangente de S, $\frac{x}{y}$ en sera la cotangente, $\frac{1}{x}$ la sécante et $\frac{1}{y}$ la cosécante.

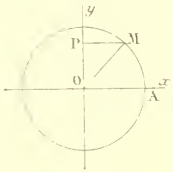
On aura évidemment

$$\sin^2 S + \cos^2 S = 1, \qquad \operatorname{tang} S = \frac{\sin S}{\cos S}, \qquad \ldots$$

x et y étant les coordonnées d'un point quelconque du cercle $x^2 + y^2 = 1$ ou de l'une de ses conjuguées, il sera toujours facile, par la théorie des aires, de savoir ce que sera S, quand même x et y seraient imaginaires.

Supposons d'abord y réel et moindre que 1, x sera

Fig. 24.



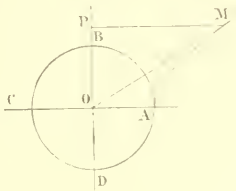
aussi réel et moindre que 1 ; le point $[x, y]$ appartiendra au cercle : soit M ce point,

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} &= \int_0^y \frac{(1 - y^2 + y^2)\,dy}{\sqrt{1-y^2}} \\
&= \int_0^y \frac{y^2\,dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^y dy\sqrt{1-y^2} \\
&= -\int_0^y \frac{-y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\,y + \int_0^y dy\sqrt{1-y^2} \\
&= \left[-y\sqrt{1-y^2}\right]_0^y + 2\int_0^y dy\sqrt{1-y^2} \\
&= 2 \text{ aire OAMP} - 2 \text{ aire OPM} \\
&= 2 \text{ aire secteur AOM} + 2k\pi = \text{S}.
\end{aligned}$$

Si y est imaginaire sans partie réelle, x sera réel et

plus grand que 1, le point $[x, y]$ appartiendra à la conjuguée à abscisses réelles du cercle : soit M ce point, $2\int_0^y dy\sqrt{1-y^2}$ sera imaginaire sans partie réelle, et représentera le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire OAMP; d'un autre côté, $-y\sqrt{1-y^2}$ représentera le double du produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire du triangle OMP; par conséquent $\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ ou S représentera le double du produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire du secteur AOM, et l'on pourra y

Fig. 25.



ajouter un nombre entier de fois 2π, parce que, avant de faire parcourir l'arc AM au point $[x, y]$, on pourra lui faire parcourir, autant de fois que l'on voudra, la circonférence ABCDA, dans un sens ou dans l'autre.

Si y et x ont respectivement pour valeurs $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ et $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, le point $[x, y]$ appartiendra à la conjuguée $C = \frac{\beta'}{\beta}$ du cercle : soit M ce point, α et α' seront les coordonnées du point N milieu de la corde réelle MNM′ de la conjuguée, c'est-à-dire OQ et QN, β sera égal à $-$ NR et β' à $+$ RM, de sorte que x et y auront respectivement pour valeurs

$$x = OQ - NR\sqrt{-1},$$
$$y = QN + RM\sqrt{-1};$$

mais la figure donne les analogies

$$\frac{QN}{BT} = \frac{ON}{OB} \quad \text{et} \quad \frac{RM}{OT} = \frac{MN}{OB},$$

c'est-à-dire

$$QN = \sin(2AOB)\cos(2BOM\sqrt{-1})$$

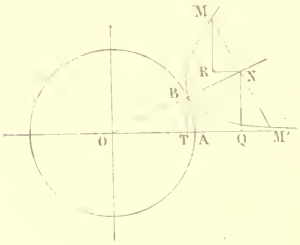
et

$$RM\sqrt{-1} = \cos(2AOB)\sin(2BOM\sqrt{-1}),$$

d'où

$$\begin{aligned} y = & \sin(2AOB)\cos(2BOM\sqrt{-1}) \\ & + \cos(2AOB)\sin(2BOM\sqrt{-1}); \end{aligned}$$

Fig. 26.



d'un autre côté, si l'on cherchait la valeur de $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, on trouverait

$$S = 2(AOB + BOM\sqrt{-1}) + 2k\pi;$$

on en conclut

$$\begin{aligned} y = \sin S = & \sin(2AOB + 2BOM\sqrt{-1}) \\ = & \sin(2AOB)\cos(2BOM\sqrt{-1}) \\ & + \cos(2AOB)\sin(2BOM\sqrt{-1}); \end{aligned}$$

on trouverait de même

$$\begin{aligned} x = \cos S = & \cos(2AOB + 2BOM\sqrt{-1}) \\ = & \cos(2AOB)\cos(2BOM\sqrt{-1}) \\ & - \sin(2AOB)\sin(2BOM\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

La formule

$$S = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

donne

$$\frac{dS}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\cos S},$$

d'où

$$\frac{dy}{dS} = D(\sin S) = \cos S;$$

d'un autre côté,

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos S}\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos S}\frac{-1}{\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}} = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\sin S},$$

d'où

$$\frac{dx}{dS} = D(\cos S) = -\sin S.$$

Il en résulte par la formule de Maclaurin

$$\sin S = S - \frac{S^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\cos S = 1 - \frac{S^2}{1.2} + \ldots,$$

quel que soit S.

28. *Précis d'une théorie rationnelle des fonctions exponentielle et logarithmique.* — Si l'on pose

$$S = \int_1^x \frac{dx}{x},$$

S sera l'aire de l'hyperbole équilatère $y = \frac{1}{x}$, comptée du sommet A jusqu'à un point quelconque d'une conjuguée quelconque et s'appellera le *logarithme de* x.

Si $\varphi(x)$ désigne une fonction de x assujettie seulement à prendre la valeur 1 pour $x = 1$, on aura identiquement

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^x \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \int_1^x \frac{\varphi(x)dx + x\varphi'(x)dx}{x\varphi(x)} = \int_1^x \frac{d[x\varphi(x)]}{x\varphi(x)}.$$

c'est-à-dire

$$L(x) + L[\varphi(x)] = L[x\varphi(x)].$$

$\varphi(x)$ pouvant prendre une valeur quelconque lorsque x n'est pas égal à 1. On en conclut

$$L(ab) = L(a) + L(b),$$

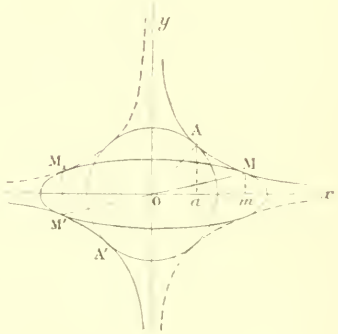
$$L\left(\frac{a}{b}\right) = L(a) - L(b),$$

$$L(a^m) = m\,La,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Le demi-axe OA de l'hyperbole est $\sqrt{2}$; par conséquent,

Fig. 27.



l'aire de la conjuguée circulaire est 2π et la période de l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$ est $2\pi\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_A^M \frac{dx}{x} = \text{aire } aAMm + 2k\pi\sqrt{-1}$$
$$= L(x) + 2k\pi\sqrt{-1}.$$

Si M' désigne le point de l'hyperbole diamétralement opposé à M,

$$\int_A^{M'} \frac{dx}{x} = \int_A^M \frac{dx}{x} + \int_M^{M'} \frac{dx}{x};$$

mais

$$\int_{M}^{M} \frac{dx}{x} = \pi\sqrt{-1},$$

par conséquent,

$$\int_{1}^{x} \frac{dx}{x} = L(x) + (2k-1)\pi\sqrt{-1}.$$

Si M_1 désigne le point de l'hyperbole supplémentaire symétrique de M par rapport à l'axe des y,

$$\int_{A}^{M_1} \frac{dx}{x} = \int_{A}^{M} \frac{dx}{x} - \int_{M}^{M_1} \frac{dx}{x};$$

mais

$$\int_{M}^{M_1} \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2}\sqrt{-1};$$

en effet, lorsque le point mobile

$$(x = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ y = \alpha' - \beta'\sqrt{-1})$$

parcourt la conjuguée C du lieu $xy = 1$, $\frac{\beta'}{\beta}$ conserve la valeur C; mais

$$\alpha' - \beta'\sqrt{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha - \beta\sqrt{-1}}{\alpha^2 - \beta^2}$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{-1};$$

de sorte que

$$\beta' = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

et que, par conséquent,

$$\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$$

conserve une valeur constante C, ou que $\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta$

reste constamment nul. Il en résulte que

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}}{\alpha - \beta\sqrt{-1}} = \int \frac{(\alpha - \beta\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$= -C\int(\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta) - C\sqrt{-1}\int(\beta\, d\alpha - \alpha\, d\beta)$$

reste imaginaire sans partie réelle. Or la partie imaginaire de $\int_M^{M_1} \frac{dx}{x}$ est $-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, car, l'ordonnée y du point M_1 de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu étant imaginaire sans partie réelle, l'expression $\frac{y^2}{2C}$ de l'aire du triangle à introduire à la limite M_1, pour rapporter le lieu au même axe des x et à une parallèle aux cordes réelles de la conjuguée MM_1, serait réelle.

Il en résulte

$$\int_1^{x\sqrt{-1}} \frac{dx}{x} = L(x) - (2k - \tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1}$$

et, de la même manière,

$$\int_1^{x\sqrt{-1}} \frac{dx}{x} = L(x) - (2k - \tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1}.$$

Comme S croît en progression arithmétique, lorsque x croît en progression géométrique et que, d'ailleurs, $\frac{dS}{dx} = \frac{1}{x}$ part de la valeur 1, lorsque $x = 1$ et $S = 0$, il en résulte que les deux progressions sont, pour x,

$$1 : (1+\alpha) : (1+\alpha)^2 : \ldots : (1+\alpha)^n : \ldots$$

et pour S,

$$0, \alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha, \ldots$$

α pouvant être réel ou imaginaire

Si l'on veut déterminer la base du système, il faut supposer α réel et prendre $n\alpha = 1$, d'où $n = \frac{1}{\alpha}$ et la base est

$$(1+\alpha)^n = (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Les logarithmes dont il s'agit dans ce qui précède sont donc les logarithmes népériens; et, en conséquence, on peut poser

$$x = e^S,$$

pourvu qu'il soit entendu que les exposants S se comporteront, dans toutes les opérations, comme s'ils étaient réels.

L'équation

$$S = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

donne

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{x},$$

d'où

$$\frac{dx}{dS} = x = e^S:$$

toutes les dérivées de x par rapport à S se réduisent donc à e^S, et ont la valeur 1, pour $S = 0$: il en résulte, par la formule de Maclaurin,

$$e^S = 1 + \frac{S}{1} + \frac{S^2}{1.2} + \ldots.$$

Remarque. — Il n'est pas étonnant que les fonctions circulaires, directes et inverses, se ramènent aux fonctions exponentielles et logarithmiques, puisque les unes ont leur origine dans la quadratrice du cercle et de ses conjuguées, qui sont des hyperboles équilatères, et les autres dans la quadratrice de l'hyperbole équilatère et de ses conjuguées, dont l'une est un cercle.

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Le second Volume de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires* contient la théorie élémentaire des fonctions elliptiques, établie d'après les mêmes principes que les deux précédentes.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

Le temps n'a permis de traiter que bien imparfaitement les questions, analogues aux précédentes, que comporte la Géométrie à trois dimensions.

Nous ne ferons guère non plus, ici, qu'indiquer les solutions.

On trouvera les explications complémentaires qui seraient jugées utiles dans les deux premiers Volumes de la *Théorie des fonctions de variables imaginaires*; mais le lecteur pourrait toujours y suppléer aisément.

1. J'appelle conjuguées d'une surface représentée par une équation

$$f(x, y, z) = 0$$

les lieux des points

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta', \qquad z_1 = \alpha'' + \beta''$$

correspondant à toutes les solutions

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \qquad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}$$

de l'équation proposée, où les parties imaginaires β, β' et β'' seraient comme des constantes

$$C, \quad C' \quad \text{et} \quad C'',$$

c'est-à-dire, telles que

$$\frac{\beta}{C} = \frac{\beta'}{C'} = \frac{\beta''}{C''}.$$

2. La situation dans l'espace du point $[x_1, y_1, z_1]$, qui représente une solution imaginaire, reste la même quelle que soit la transformation de coordonnées qu'on fasse subir au lieu considéré et, par suite, à la solution représentée.

En effet, si les formules de transformation, résolues par rapport aux nouvelles coordonnées, sont

$$\begin{aligned} x' &= a + mx + ny + pz, \\ y' &= a' + m'x + n'y + p'z, \\ z' &= a'' + m''x + n''y + p''z, \end{aligned}$$

les valeurs des nouvelles coordonnées x', y', z' qui correspondent à

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \qquad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}$$

sont

$$\begin{aligned} x' &= a + m\alpha + n\alpha' + p\alpha'' + (m\beta + n\beta' + p\beta'')\sqrt{-1}, \\ y' &= a' + m'\alpha + n'\alpha' + p'\alpha'' + (m'\beta + n'\beta' + p'\beta'')\sqrt{-1}, \\ z' &= a'' + m''\alpha + n''\alpha' + p''\alpha'' + (m''\beta + n''\beta' + p''\beta'')\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

de sorte que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point représentatif de la première solution étant

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta', \qquad z_1 = \alpha'' + \beta''$$

et les coordonnées x'_1, y'_1, z'_1 du point représentatif de la seconde solution étant

$$\begin{aligned} x'_1 &= a + m(\alpha + \beta) + n(\alpha' + \beta') + p(\alpha'' + \beta''), \\ y'_1 &= a' + m'(\alpha + \beta) + n'(\alpha' + \beta') + p'(\alpha'' + \beta''), \\ z'_1 &= a'' + m''(\alpha + \beta) + n''(\alpha' + \beta') + p''(\alpha'' + \beta'') \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x'_1 &= a + mx_1 + ny_1 + pz_1, \\ y'_1 &= a' + m'x_1 + n'y_1 + p'z_1, \\ z'_1 &= a'' + m''x_1 + n''y_1 + p''z_1 \end{aligned}$$

il est clair que les deux points (x, y, z) et (x_1, y_1, z_1) coïncident, puisque leurs coordonnées sont reliées entre elles par les formules de la transformation effectuée.

Le mode de construction adopté, pour obtenir les coordonnées du point représentatif d'une solution, est d'ailleurs le seul qui assure la fixité dans l'espace de ce point, puisque, par exemple, pour assurer la fixité du point dans l'espace, il faudrait, au moins, assurer celle de sa projection sur le plan des xy, si l'on ne faisait changer que les directions des axes des x et des y, dans l'ancien plan des xy et que, pour cela, il faudrait, d'après ce qu'on a vu en Géométrie plane, représenter la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

par le point

$$x_1 = \alpha - \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

3. Une droite réelle

$$\frac{x-d}{C} = \frac{y-d}{C} = \frac{z-d}{C''}$$

n'est capable que de solutions du système $[C, C', C'']$; de sorte que la conjuguée $[C, C', C'']$ d'un lieu $f(x, y, z) = 0$ est le lieu des intersections idéales, réalisées, de ce lieu et de la suite des droites représentées par les équations $\frac{x-d}{C} = \frac{y-d'}{C} = \frac{z-d''}{C''}$, où d, d' et d'' seraient variables à volonté.

Ces droites sont les *cordes réelles* de la conjuguée, elles joignent deux à deux ses points imaginaires conjugués.

4. En rendant l'un des axes de coordonnées parallèle aux cordes réelles d'une conjuguée, on rendrait en

même temps réelles les deux autres coordonnées de tous ses points.

5. Il en résulte que, par un choix convenable d'axes, on peut toujours ramener l'ordonnée z, par exemple, d'une conjuguée à être une fonction de deux autres variables x et y, réelles.

6. Les conjuguées d'une surface réelle lui sont généralement inscrites ou circonscrites et la courbe de contact, pour chacune d'elles, est la courbe de contact avec la même surface réelle du cylindre qui lui serait circonscrit parallèlement aux cordes réelles de la conjuguée en question. Une surface réelle est donc l'enveloppe de ses conjuguées.

Les conjuguées d'un cône réel sont les cônes, de même sommet, ayant pour directrices, dans un plan quelconque, les conjuguées de la section du cône par ce plan.

Les conjuguées d'un cylindre réel sont les cylindres ayant pour directrices, dans un plan quelconque, les conjuguées de la section du cylindre par ce plan et leurs génératrices parallèles à celles du cylindre proposé.

7. Les conjuguées des surfaces du second degré sont d'autres surfaces du second degré, aisées à définir dans tous les cas.

8. Les conjuguées d'un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ ont généralement une seconde enveloppe imaginaire, lieu des points du lieu où les rapports deux à deux des trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z sont réels.

En effet, les éléments du lieu $f(X, Y, Z) = 0$ aux environs d'un de ses points (x, y, z) sont définis par

l'équation

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$$

ou

$$dz = -\frac{f'_x}{f'_z} dx - \frac{f'_y}{f'_z} dy,$$

c'est-à-dire

$$dz = (m + n\sqrt{-1})\, dx + (p + q\sqrt{-1})\, dy,$$

si $m + n\sqrt{-1}$ et $p + q\sqrt{-1}$ sont respectivement les valeurs de $-\frac{f'_x}{f'_z}$ et $\frac{f'_y}{f'_z}$, au point (x, y, z).

Si l'on fait

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$
$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1},$$
$$dz = d\alpha'' + d\beta''\sqrt{-1};$$

l'équation précédente donne

$$d\alpha'' = m\, d\alpha - n\, d\beta + p\, d\alpha' - q\, d\beta'$$

et

$$d\beta'' = m\, d\beta + n\, d\alpha + p\, d\beta' + q\, d\alpha';$$

d'où

$$d\alpha'' + d\beta'' = (m + n)\, d\alpha + (m - n)\, d\beta + (p + q)\, d\alpha' + (p - q)\, d\beta',$$

c'est-à-dire

$$dz_1 = \frac{(m + n)\, d\alpha + (m - n)\, d\beta}{d\alpha + d\beta}\, dx_1 - \frac{(p - q)\, d\alpha' + (p - q)\, d\beta'}{d\alpha' - d\beta'}\, dy_1$$

ou encore

$$dz_1 = \frac{m + n + (m - n)\frac{d\beta}{d\alpha}}{1 - \frac{d\beta}{d\alpha}}\, dx_1 + \frac{p - q + (p - q)\frac{d\beta'}{d\alpha'}}{1 + \frac{d\beta'}{d\alpha'}}\, dy_1.$$

Pour que le point $[x, y, z]$ appartînt à l'enveloppe des

conjuguées, il faudrait que tous ces éléments fussent compris dans un même plan, qui serait le plan tangent à l'enveloppe au point $[x, y, z]$; pour cela, il faudrait que dz_1 ne dépendît que de dx_1 et de dy_1, et, par conséquent, fût indépendant de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ et de $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$. Cela exigerait les deux conditions

$$\frac{m+n}{1} = \frac{m-n}{1} \quad \text{et} \quad \frac{p+q}{1} = \frac{p-q}{1},$$

c'est-à-dire $n = 0$ et $q = 0$.

Ainsi, tout point de l'une ou l'autre enveloppe est nécessairement tel qu'en ce point

$$\frac{f'_x}{f'_z} \quad \text{et} \quad \frac{f'_y}{f'_z}$$

soient réels.

Mais chaque conjuguée ne touche l'enveloppe imaginaire qu'en quelques points et non plus suivant une courbe. En effet, les solutions des trois équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \frac{f'_x}{f'_z} = \text{réel}, \qquad \frac{f'_y}{f'_z} = \text{réel},$$

où l'on ferait $x = \alpha + \beta C\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta C'\sqrt{-1}$, $z = \alpha'' - \beta C''\sqrt{-1}$, seraient déterminées, puisque α, α', α'' et β seraient liés entre eux par quatre conditions.

Exemples. — L'enveloppe imaginaire des conjuguées ellipsoïdales d'un hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est l'hyperboloïde à deux nappes supplémentaires

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

lequel est fourni par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \beta'\sqrt{-1}, \qquad z = \beta''\sqrt{-1}$$

de l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

L'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$(x - a - b\sqrt{-1})^2 + (y - a' - b'\sqrt{-1})^2 + (z - a'' - b''\sqrt{-1})^2 = (r + r'\sqrt{-1})^2$$

est la sphère

$$(x - a - b)^2 + (y - a' - b')^2 + (z - a'' - b'')^2 = (r + r')^2.$$

9. Les conjuguées du lieu

$$(M + N\sqrt{-1})x + (P + Q\sqrt{-1})y + (R + S\sqrt{-1})z + D + E\sqrt{-1} = 0.$$

sont tous les plans qui passent par la droite représentée par les équations

$$Mx + Py + Rz + D = 0 \qquad \text{et} \qquad Nx + Qy + Sz + E = 0.$$

10. Un plan réel ne peut couper que les conjuguées dont les cordes réelles lui sont parallèles.

11. La section complète d'un lieu $f(x, y, z) = 0$ par un plan réel se compose de la section, par ce plan, de la surface réelle et des sections effectives, par ce même plan, de toutes les conjuguées du lieu dont les cordes réelles lui sont parallèles.

Les sections par le plan considéré des conjuguées du lieu qu'il peut couper sont, dans ce plan, les conjuguées de la section de la surface réelle, si elle est effectivement coupée; et la section de la surface réelle est l'enveloppe réelle des sections des conjuguées que le plan coupe.

Ces dernières sections ont le plus souvent une autre enveloppe, imaginaire: mais cette seconde enveloppe

n'est généralement pas la section par le plan considéré de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu proposé.

Ainsi, par exemple, l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

est l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

représenté par les solutions de la forme

$$x=\beta\sqrt{-1},\qquad y=\beta'\sqrt{-1},\qquad z=\beta''\sqrt{-1}$$

de l'équation; mais, si l'on coupe le lieu par un plan $z=h$, les conjuguées de la section ont pour enveloppe imaginaire l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

qui n'appartient pas à la surface enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu.

Cela tient à ce que celles des cordes réelles de la surface enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu, qui seraient parallèles au plan sécant, ne seront généralement pas dans ce plan, ou ne s'y trouveront qu'en nombre limité.

Ainsi, dans l'exemple, les cordes réelles de la surface enveloppe imaginaire, qui seraient parallèles au plan $z=h$, seraient comprises dans le plan $z=0$, deux points imaginaires conjugués de la surface enveloppe imaginaire étant les extrémités d'un même diamètre de la surface.

En un point $x=\beta\sqrt{-1}$, $y=\beta'\sqrt{-1}$, $z=h$ de

l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 - \frac{h^2}{c^2},$$

$\frac{f'_x}{f'_y}$ est bien réel, mais ni $\frac{f'_x}{f'_z}$ ni $\frac{f'_y}{f'_z}$ ne le sont : en effet,

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\frac{3\sqrt{-1}}{a^2}}{\frac{3\sqrt{-1}}{b^2}}$$

est bien réel, mais

$$\frac{f'_x}{f'_z} = \frac{\frac{3\sqrt{-1}}{a^2}}{\frac{h}{c^2}} \quad \text{et} \quad \frac{f'_y}{f'_z} = \frac{\frac{3\sqrt{-1}}{b^2}}{\frac{h}{c^2}}$$

ne le sont pas.

12. Lorsqu'un plan sécant réel donne, dans la surface réelle, une section comprenant, entre autres branches, un anneau fermé, si le plan se déplace parallèlement à lui-même, cet anneau se réduit à un point au moment où le plan devient tangent à la nappe fermée de la surface réelle, et est ensuite remplacé par un anneau d'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section.

13. Le plan tangent à une conjuguée (C, C', C'') d'un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ en un point (x, y, z) de cette conjuguée est la conjuguée (C, C', C'') de l'onglet de plans

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t = 0.$$

14. Si le premier membre de l'équation d'un lieu est décomposé en groupes de termes homogènes et représenté par

$$\varphi(X, Y, Z) + \psi(X, Y, Z) + \chi(X, Y, Z) + \ldots$$

l'équation générale des plans asymptotes à la surface réelle et à ses conjuguées est

$$\varphi'_\alpha X + \varphi'_\beta Y + \varphi'_\gamma Z + \psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

α, β, γ formant une solution réelle ou imaginaire de l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Les conjuguées des cônes asymptotes des surfaces du second degré sont les cônes asymptotes des conjuguées de ces surfaces.

15. Le contour apparent d'une surface $f(X, Y, Z) = 0$, par rapport au plan des xy et parallèlement à l'axe des z, a pour équations

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_z(x, y, z) = 0,$$

qui, par l'élimination de z, fourniraient l'équation

$$F(X, Y) = 0$$

du contour apparent proprement dit.

Le lieu $F(X, Y) = 0$, construit dans le plan des $[X, Y]$, se composera en général d'une courbe réelle et de toutes ses conjuguées. La courbe réelle formera le contour apparent proprement dit de la surface réelle représentée par l'équation $f(X, Y, Z) = 0$; mais les conjuguées de cette courbe $F(X, Y) = 0$ ne seront pas les contours apparents des conjuguées de la surface $f(X, Y, Z) = 0$, parce que dans les solutions correspondantes des équations

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'_z(x, y, z) = 0,$$

le rapport $\frac{\rho'}{\rho}$ des parties imaginaires de x et de y sera bien constant, mais non pas les rapports $\frac{\rho''}{\rho}$ et $\frac{\rho''}{\rho'}$ (¹).

16. Toutes celles des conjuguées d'une même surface qui la touchent en un même point (ce sont celles dont les cordes réelles sont parallèles au plan tangent en ce point) y ont pour indicatrices les conjuguées de l'indicatrice de la surface réelle au même point.

Les autres questions relatives à la courbure des surfaces imaginaires se résolvent par les mêmes méthodes que l'on emploie pour les surfaces réelles.

17. *De la cubature des surfaces, et des périodes des intégrales doubles.* — On trouvera, dans le second Volume de la *Théorie des fonctions de variables imaginaires*, tous les théorèmes préliminaires qui permettent d'établir l'équivalence des chemins qui peuvent se substituer les uns aux autres sans que la valeur de l'intégrale double soit altérée.

Ces propositions ne présentent d'autre intérêt que celui de rendre possible la démonstration *a priori* d'un

---

(¹) Si l'on coupait un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ par une série de plans réels, parallèles entre eux et à l'axe des z, les points critiques de chaque section seraient les points d'intersection, par les plans considérés, du contour apparent de la surface $f(X, Y, Z) = 0$, par rapport au plan des $[X, Y]$; et pour instituer, relativement aux intégrales doubles, une méthode analogue à celle que Cauchy a fondée pour les intégrales simples, il faudrait faire jouer au contour apparent de la surface à cuber le même rôle factice que Cauchy avait attribué aux contours apparents, par rapport à l'axe des x, des courbes à quarrer.

J'ai réalisé cette idée en 1872, dans un Mémoire qui a paru, vers 1874, dans le XLIVe Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* et que l'on trouvera dans le troisième Volume de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires*.

fait que l'on peut regarder comme évident : c'est qu'une intégrale double est déterminée, à des constantes près, par ses limites, tandis qu'elle serait complètement indéterminée si elle variait d'une manière continue avec le chemin superficiel suivi pour rejoindre les limites.

Nous omettons ici ces théorèmes et nous réduisons toute la théorie à sa plus simple expression.

La quadratrice de la section d'un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ par un plan réel admet : 1°, comme périodes réelles, ω, ω', ω'', ... les aires des anneaux fermés de la section de la surface réelle, lorsqu'elle existe et qu'elle est effectivement coupée par le plan réel considéré; 2°, comme périodes imaginaires, $\omega_1\sqrt{-1}$, $\omega'_1\sqrt{-1}$, $\omega''_1\sqrt{-1}$ les produits par $\sqrt{-1}$ des aires des anneaux fermés des sections faites dans les conjuguées du lieu dont les cordes réelles sont parallèles au plan sécant, mais les aires de tous ceux de ces anneaux fermés qui sont compris entre les deux mêmes branches de la section réelle sont égales; 3°, comme périodes généralement mixtes, $\omega_2 + \omega_3\sqrt{-1}$, $\omega'_2 + \omega'_3\sqrt{-1}$, ... les valeurs de l'intégrale quadratrice, acquises dans le parcours des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section; 4° enfin, comme périodes cycliques, $\pi d^2\sqrt{-1}$, $\pi d'^2\sqrt{-1}$, $\pi d''^2\sqrt{-1}$, ... les produits par $\sqrt{-1}$ des aires des parties elliptiques évanouissantes des conjuguées dont les cordes réelles sont parallèles aux asymptotes de la section.

18. Si l'on a coupé le lieu par une série de plans parallèles entre eux et distants les uns des autres de la quantité dh et que Ω soit l'une des périodes de la quadratrice de la section, $\Omega\, dh$ sera un élément d'une des périodes de la cubatrice de la surface et, pour obtenir cette période, il faudra prendre l'intégrale $\int \Omega\, dh$, entre

deux valeurs de h pour lesquelles Ω s'annule, c'est-à-dire entre deux plans tangents au lieu $f(X, Y, Z) = 0$.

19. Si la période considérée est l'aire d'un anneau fermé de la section réelle, elle engendrera un volume enveloppé par une nappe de la surface réelle, fermée dans tous les sens parallèles au plan sécant; et, si cette nappe se ferme encore dans un nouveau sens, non parallèle au plan sécant, la période engendrée sera le volume enfermé par une nappe sphéroïdale de la surface réelle.

20. Si la période considérée est le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire d'un anneau fermé de conjuguée de la section et si cet anneau engendre une nappe fermée de conjuguée de la surface proposée, la période engendrée sera le produit par $\sqrt{-1}$ du volume enfermé dans la nappe fermée de la conjuguée en question.

21. *Toutes les conjuguées fermées d'une même surface, inscrites dans la même nappe de la surface réelle, enveloppent des volumes égaux.* — En effet, comparons d'abord entre elles celles de ces conjuguées dont les cordes réelles sont parallèles à un même plan parallèle à l'axe des z : d'une part, les sections faites dans toutes ces conjuguées par un même plan quelconque, parallèle au plan considéré, auront toutes même aire et, d'autre part, ces sections s'évanouiront toutes dans les mêmes plans; car les courbes de contact de toutes ces conjuguées avec la surface réelle ne seront autre chose que les courbes de contact, avec cette même surface réelle, de tous les cylindres qui lui seraient inscrits parallèlement aux cordes réelles de toutes les conjuguées considérées, c'est-à-dire à toutes les droites parallèles à un même plan. Or, toutes ces courbes se couperont aux mêmes points de

la surface réelle, lesquels seront les points de contact avec cette surface réelle de ses plans tangents parallèles au plan considéré; de sorte que, déjà, toutes les conjuguées en question envelopperont des volumes égaux et, en particulier, égaux au volume enveloppé par la conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles à l'axe des z.

Mais un plan parallèle à l'axe des z pourra être dirigé parallèlement aux cordes réelles d'une conjuguée quelconque, non comprise parmi les précédentes, et le volume enveloppé par cette nouvelle conjuguée fermée sera encore égal au volume enfermé par la conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles à l'axe des z.

La démonstration du théorème énoncé s'étend donc à toutes les conjuguées.

Il en résulte que le produit par $\sqrt{-1}$ du volume enveloppé par l'une quelconque des conjuguées fermées d'une surface réelle $f(x, y, z) = 0$, inscrites dans la même nappe réelle de cette surface, est l'une des périodes de l'intégrale cubatrice de cette surface.

Ces propositions se trouvaient déjà dans mon Mémoire de 1853 et Cauchy les énonce dans son Rapport de 1854 sur ce Mémoire.

22. Si la période considérée correspond au parcours d'un anneau fermé de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section faite dans la surface par le plan réel qui se déplace parallèlement à lui-même, cette période s'annulera lorsque le plan sécant deviendra tangent soit à la surface réelle et à l'enveloppe imaginaire des conjuguées de cette surface, si elles coexistent, soit à celle qui subsistera seule. D'ailleurs l'intégrale $\int \Omega\, dh$, évaluée entre deux valeurs de h pour lesquelles le plan mobile deviendrait tangent, soit à la surface réelle, soit à l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées, fournira une pé-

riode, généralement imaginaire, de l'intégrale cubatrice du lieu considéré.

Ainsi, par exemple, si l'on rapporte un hyperboloïde à deux nappes à trois de ses diamètres conjugués, dont l'un, l'axe des z, soit le diamètre transverse, l'équation de la surface sera

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = -1.$$

Si l'on coupe la surface par un plan $z = h$, compris entre les plans tangents

$$z = -c' \quad \text{et} \quad z = +c',$$

la section totale aura pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = \frac{h^2}{c'^2} - 1,$$

et cette équation représentera une infinité d'hyperboles ayant pour enveloppe imaginaire une courbe qui, réalisée, sera l'ellipse

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1 - \frac{h^2}{c'^2}.$$

la période, réelle dans ce cas, de la quadratrice de la section sera

$$\Omega = \pi a' b' \sin(XOY),$$

et la période de la cubatrice du lieu, engendrée par cette période superficielle, sera

$$\int_{-c'}^{+c'} \pi a' b' \sin(xoy)\, dh \sin(Z, XOY),$$

c'est-à-dire le volume de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

ou

$$\frac{4}{3}\pi abc,$$

a, b, c désignant les axes de l'hyperboloïde proposé; car tous les ellipsoïdes, tels que $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$, seront équivalents, en volume, comme on le sait.

De sorte que, dans ce cas particulier, le fait, analogue à celui de l'équivalence en volume des conjuguées fermées d'une même surface, inscrites dans une même nappe de cette surface, se présente de lui-même relativement aux lieux des enveloppes imaginaires des sections faites dans la surface par des plans parallèles de direction arbitraire; dans le cas particulier qui vient d'être examiné, les nappes fermées, lieux de ces enveloppes, entourent des volumes égaux.

Cette proposition pourrait être généralisée. Elle n'est pas indiquée dans ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires,* où la question des intégrales doubles a été prise à un tout autre point de vue.

23. Enfin, si la période considérée est une des périodes cycliques de la quadratrice de la section faite dans la surface par le plan mobile, c'est-à-dire le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire d'une ellipse indéfiniment allongée dans un sens et indéfiniment aplatie dans l'autre, elle s'annulera dans deux plans, et l'intégrale correspondante

$$\int \pi\, d^2 dh$$

évaluée entre ces deux plans prendra une valeur numérique qui sera le produit par $\sqrt{-1}$ du volume fini d'un ellipsoïde ayant un axe infini, un axe fini et un axe infiniment petit.

J'ai donné le nom de *périodes sphériques* à ce genre de périodes de l'intégrale cubatrice d'une surface.

Soit

$$\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) = \chi(x, y, z) = \ldots = 0$$

l'équation de la surface la plus générale de degré m, décomposée en groupes de termes homogènes, de sorte que $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ soient des polynômes homogènes de degrés $m, m-1, m-2, \ldots$.

Soient d'ailleurs

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$$

les équations d'une direction asymptotique, de sorte que

$$\varphi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

et

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z}{1}$$

les équations d'une parallèle à cette direction : si l'on veut avoir les intersections de cette parallèle avec la surface, on pourra remplacer dans l'équation proposée x, y et z par

$$x_0 + \alpha\rho, \quad y_0 + \beta\rho \quad \text{et} \quad \rho,$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned}\rho^m \varphi(\alpha, \beta, 1) + \rho^{m-1}[(x_0 \varphi'_\alpha + y_0 \varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1)] \\ + \frac{\rho^{m-2}}{1.2}[x_0^2 \varphi''_{\alpha^2} + 2x_0 y_0 \varphi''_{\alpha\beta} + y_0^2 \varphi''_{\beta^2} \\ + 2x_0 \psi'_\alpha + 2y_0 \psi'_\beta + 2\chi(\alpha, \beta, 1)] + \ldots = 0;\end{aligned}$$

mais le terme en ρ^m disparaîtra de lui-même, $\varphi(\alpha, \beta, 1)$ étant nul par hypothèse.

Si l'on veut exprimer que la droite

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z}{1}$$

est elle-même une asymptote, il faudra poser

$$x_0 \varphi'_\alpha + y_0 \varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

ce qui donnera une relation entre les coordonnées x_0, y_0 de la trace sur le plan des xy d'une asymptote paral-

lèle à la direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$, d'où l'on voit que les asymptotes parallèles à une même direction asymptotique sont généralement dans un même plan.

Si l'on voulait déterminer les asymptotes, parallèles à la même direction, qui rencontrent la surface en trois points situés à l'infini, il faudrait poser la nouvelle condition

$$x_0 \varphi''_{\alpha^2} + 2x_0 y_0 \varphi''_{\alpha\beta} + y_0^2 \varphi''_{\beta^2} + 2x_0 \psi'_\alpha + 2y_0 \psi'_\beta + 2\chi(\alpha, \beta, 1) = 0;$$

d'où l'on voit, comme cela avait été annoncé, que, parmi toutes les asymptotes parallèles à une même direction, il y en aura généralement deux, et deux seulement, qui rencontreront la surface en trois points situés à l'infini, ou, ce qui revient au même, que, si un plan quelconque se déplace parallèlement à lui-même, chacune des périodes cycliques de la quadratrice de la section de la surface par ce plan mobile s'annulera deux fois et deux fois seulement.

Nous allons chercher la nature et la valeur de la période engendrée dans l'intervalle compris entre deux pareils plans limites.

L'équation la plus générale d'une surface ayant des asymptotes parallèles à l'axe des z est

$$\begin{aligned}&(ax + by + c)z^{m-1}\\ &\quad + (dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy + k)z^{m-2} + \ldots = 0:\end{aligned}$$

si l'on voulait que l'axe des z fût lui-même une asymptote, il faudrait faire $c = 0$; et, si l'on voulait encore que l'axe des z fût une asymptote d'inflexion d'une section plane quelconque de la surface par un plan passant par l'axe des z, il faudrait faire $k = 0$.

L'équation de la surface deviendrait alors

$$\begin{aligned}&(ax + by)z^{m-1}\\ &\quad + (dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy)z^{m-2} + \ldots = 0.\end{aligned}$$

Les traces, sur le plan des xy, des asymptotes parallèles à l'axe des z seraient alors les divers points de la droite $ax + by = 0$.

Si l'on voulait que le lieu de ces traces fût l'axe des x, c'est-à-dire que les asymptotes parallèles à l'axe des z fussent toutes contenues dans le plan des zx, il faudrait faire $a = 0$.

Alors l'équation de la surface, en divisant par b, deviendrait

$$yz^{m-1} + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y) z^{m-2} + \ldots = 0.$$

Si l'on coupait cette surface par un plan $x = l$, l'équation de la projection, en vraie grandeur, de la section sur le plan des yz, parallèlement aux x, serait

$$yz^{m-1} + [\gamma y^2 + (\beta l + \varepsilon) y + \alpha l^2 + \delta l] z^{m-2} + \ldots = 0;$$

la période cyclique, relative à l'axe des z de la quadratrice de cette courbe, est

$$= 2\pi \sqrt{-1} \sin yz (\alpha l^2 + \delta l),$$

qui s'annule pour $l_0 = 0$, et $l_1 = -\frac{\delta}{\alpha}$.

Pour obtenir le volume engendré par cette période cyclique, il faudrait calculer l'intégrale

$$\pm 2\pi \sqrt{-1} . \alpha \sin \mathrm{YZ} \int_{l_0}^{l_1} l(l - l_1) \mathrm{K} dl,$$

K désignant l'inverse du rapport d'une longueur, comptée sur l'axe des x, à sa projection sur une perpendiculaire au plan des yz.

Cette intégrale a pour valeur

$$\pm 2\pi \sqrt{-1} . \alpha \mathrm{K} \sin \mathrm{YZ} \left(\frac{l_1^3}{3} - \frac{l_1^3}{2} \right)$$

ou

$$= \sqrt{-1} . \alpha \mathrm{K} \sin \mathrm{YZ} \, \tfrac{1}{3} \pi \left(\frac{l_1}{2} \right)^3;$$

on voit que c'est le produit par $\sqrt{-1}\,\alpha K \sin y\, z$ du volume d'une sphère.

Mais le volume cubé est en réalité celui d'un ellipsoïde dont l'un des diamètres, parallèle à l'axe des x, serait l_1, et dont les deux autres, situés dans le plan

$$x = \frac{l_1}{2}$$

auraient, l'un, une valeur nulle, et l'autre, une valeur infinie, de telle sorte, cependant, que le rectangle de ces deux diamètres fût $\frac{l_1^2}{4}$.

On peut, au reste, très aisément, obtenir l'équation même de cet ellipsoïde, en étendant aux surfaces algébriques le théorème qui nous a servi à fonder la théorie des périodes cycliques des quadratrices des courbes algébriques, c'est-à-dire cette proposition que, dans le voisinage de l'une de ses asymptotes, non inflexionnelle, une courbe de degré quelconque tend toujours à se confondre avec une hyperbole du second degré.

Pour les surfaces algébriques, le théorème s'énoncera ainsi :

La nappe d'une surface algébrique de degré quelconque qui se rapproche indéfiniment du plan lieu d'une série d'asymptotes parallèles et non inflexionnelles de la surface, cette nappe tend à se confondre avec un hyperboloïde du second degré; et celle des conjuguées de la surface, dont les cordes réelles sont parallèles aux mêmes asymptotes, comprend, outre d'autres nappes, une nappe fermée séparée des autres et qui tend à se confondre avec un ellipsoïde indéfiniment aplati et indéfiniment allongé le long du plan lieu des asymptotes considérées, c'est-à-dire un ellipsoïde dont le diamètre, conjugué du plan considéré, tend vers

zéro, et dont les deux autres diamètres, contenus dans ce même plan, sont l'un fini et l'autre infini, ce dernier ayant d'ailleurs la direction des asymptotes en question.

En effet, reprenons l'équation de la surface sous la forme déjà employée

$$yz^{m-1} + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y)\, z^{m-2} + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire supposons qu'on ait fait le choix d'axes défini précédemment (la direction de l'axe des y est restée quelconque, mais c'est indifférent, puisqu'on cherche ce que devient la surface dans la direction de $y = 0$). Si l'on coupe cette surface par un plan $x = l$, l'équation de la projection de la section sur le plan des yz est

$$yz^{m-1} + (\alpha l^2 + \delta l + \beta ly + \gamma l^2 + \varepsilon l)\, z^{m-2} + \ldots = 0;$$

dans cette équation, le produit de y devenu nul par z devenu infini tend vers $-(\alpha l^2 + \delta l)$; par conséquent les équations de la section considérée tendent à se réduire à

$$yz + \alpha l^2 + \delta l = 0 \qquad \text{avec} \qquad x = l;$$

l'équation de la surface, dans les environs de son plan asymptote, $y = 0$, tend donc à se réduire à

$$yz + \alpha x^2 + \delta x = 0,$$

ou

$$yz + \alpha\left(x + \frac{\delta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4\alpha},$$

qui représente un hyperboloïde à une nappe.

Parmi les ellipsoïdes conjugués de cet hyperboloïde, il y en a un qui appartient à la surface proposée, comme étant une de ses conjuguées : c'est celui dont les cordes réelles ont une direction infiniment voisine de celle des asymptotes de la surface, contenues dans le plan $y = 0$.

Ce serait cet ellipsoïde indéfiniment aplati dans le sens des y et indéfiniment allongé dans le sens de l'axe des z dont il faudrait calculer le volume, pour obtenir la période sphérique de la cubatrice de la surface; mais comme tous les ellipsoïdes conjugués de l'hyperboloïde

$$yz + \alpha\left(x - \frac{\delta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4\alpha}$$

ont même volume, on choisira celui qu'on voudra d'entre eux.

24. On voit, par ce qui vient d'être dit, que la direction des plans sécants, parallèles entre eux, au moyen desquels on découpe la surface à cuber, étant choisie, et par conséquent les m asymptotes de la surface, parallèles à ces plans, étant définies, on trouvera, dans la cubatrice, m périodes sphériques.

Mais, si la direction des plans sécants venait à changer, les asymptotes de la surface, qu'il faudrait faire intervenir, changeraient aussi, et ce serait évidemment une question très intéressante de savoir si les périodes sphériques de la cubatrice changeraient aussi.

La question n'aurait pas lieu d'être posée au sujet de l'hyperboloïde à une nappe (ni de l'hyperboloïde à deux nappes, mais pour une autre raison), puisqu'on sait que la période unique de la cubatrice d'un hyperboloïde à une nappe est le produit par $\sqrt{-1}$ du volume enveloppé par l'un quelconque des ellipsoïdes, allongés ou non, de cet hyperboloïde.

Mais le fait, évident dans le cas des surfaces du second degré, ne l'est plus du tout dans le cas des surfaces de degrés supérieurs, et la preuve du fait, presque surabondante dans le premier cas, ne se trouverait pas, pour les autres, dans des considérations auss simples.

Cependant le théorème est général.

Mais je n'en donnerai pas la démonstration en ce moment.

25. *Classification des intégrales doubles cubatrices des surfaces algébriques.* — La nature de la cubatrice d'une surface algébrique dépendra toujours essentiellement de celle de la quadratrice d'une section plane quelconque de cette surface.

Si l'on veut que la cubatrice n'ait aucune période ultrasphérique, il faudra que la quadratrice d'une quelconque de ses sections planes n'ait pas de périodes ultracycliques et, pour cela, si l'on veut que les sections planes de la surface dépendent encore du plus grand nombre possible de paramètres, sous la condition d'être quarrables par les fonctions circulaires ou logarithmiques, il faudra que ces sections présentent chacune $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, m désignant le degré de la surface; c'est-à-dire qu'il faudra que la surface elle-même contienne une courbe double du degré $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

26. Si l'on veut que la cubatrice de la surface soit algébrique, il faudra en outre que toutes les sections planes de cette surface soient quarrables algébriquement, c'est-à-dire que les m asymptotes d'une section plane quelconque coupent, chacune, cette section en trois points situés à l'infini, ou en $m-3$ points seulement, à distance finie.

27. Nous allons chercher l'expression analytique des conditions renfermées dans cette dernière condition.

Reprenons pour cela les équations établies au début du n° 23 :

Pour que la période cyclique relative à l'asymptote

parallèle à $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$ de la quadratrice d'une section plane mobile parallèle à cette direction, restât toujours identiquement nulle, c'est-à-dire pour que la période sphérique correspondante restât constamment nulle, il faudrait qu'en éliminant x_0, par exemple entre les équations

$$x_0 \varphi'_\alpha + y_0 \varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0$$

et

$$x_0^2 \varphi''_{\alpha^2} + 2x_0 y_0 \varphi''_{\alpha\beta} + y_0^2 \varphi''_{\beta^2} + 2x_0 \psi'_\alpha + 2y_0 \psi'_\beta + 2\chi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

on tombât sur une équation identique en y_0.

Ces conditions sont

$$(1) \qquad \varphi''_{\alpha^2} \varphi'^2_\beta - 2\varphi''_{\alpha\beta} \varphi'_\alpha \varphi'_\beta + \varphi''_{\beta^2} \varphi'^2_\alpha = 0.$$

$$(2) \quad \psi''_{\alpha^2} \varphi'_\beta \psi(\alpha, \beta, 1) - \varphi''_{\alpha\beta} \varphi'_\alpha \psi(\alpha, \beta, 1) - \varphi'_\alpha \varphi'_\beta \psi'_\alpha + \varphi'_{\alpha^2} \psi'_\beta = 0$$

et

$$(3) \quad \varphi''_{\alpha^2} \psi^2(\alpha, \beta, 1) - 2\varphi'_\alpha \psi'_\alpha \psi(\alpha, \beta, 1) + 2\varphi'^2_\alpha \chi(\alpha, \beta, 1) = 0.$$

Si l'on veut que ces trois conditions soient satisfaites, quels que soient α et β, c'est-à-dire si l'on veut que toutes les périodes sphériques de la cubatrice disparaissent, ces trois conditions devront être considérées comme des équations simultanées, aux différentielles partielles, dont les fonctions φ, ψ et χ seraient les inconnues.

Il s'agit d'intégrer ces trois équations.

Occupons-nous d'abord de la première, qui ne contient que la fonction φ. Elle exprime que le cône lieu des parallèles aux asymptotes de la surface, menées par l'origine, est formé de m plans.

En effet, l'équation de ce cône est $\varphi(x, y, z) = 0$, de sorte que $\varphi(x, y, 1) = 0$ est l'équation de la section de ce cône par le plan $z = 1$. Or, pour exprimer que le lieu $\varphi(x, y, 1) = 0$ se compose de droites, il faudrait

exprimer que $\frac{d^2y}{dx^2}$, en un quelconque de ses points, est nul et c'est précisément ce qu'exprime l'équation (1), car l'équation $\varphi(x, y, 1) = 0$ donne d'abord

$$\varphi'_y \frac{dy}{dx} + \varphi'_x = 0,$$

et ensuite

$$\varphi'_y \frac{d^2y}{dx^2} + \varphi''_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\varphi''_{xy}\frac{dy}{dx} + \varphi''_{x^2} = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$,

$$\varphi'_y \frac{d^2y}{dx^2} + \varphi''_{y^2}\frac{\varphi'^2_x}{\varphi'^2_y} - 2\varphi''_{xy}\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} + \varphi''_{x^2} = 0,$$

d'où l'on voit que la condition

$$\varphi''_{y^2}\varphi'^2_x - 2\varphi''_{xy}\varphi'_x\varphi'_y + \varphi''_{x^2}\varphi'^2_y = 0$$

revient à $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Ainsi la fonction $\varphi(x, y, z)$ doit être le produit de m facteurs linéaires

$$\begin{gathered}(A_1 x + B_1 y + C_1 z),\\ (A_2 x + B_2 y + C_2 z),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ (A_m x + B_m y + C_m z).\end{gathered}$$

En second lieu, l'équation (2) exprime que toutes les asymptotes de la surface sont effectivement contenues dans m plans.

En effet, toutes les asymptotes infiniment peu inclinées les unes sur les autres doivent déjà être parallèles à un même des plans représentés par l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$, car une asymptote variable de direction, d'une manière continue, ne pourrait changer de plan directeur qu'en prenant momentanément la direction

de l'intersection de son ancien plan directeur avec l'un des $(m-1)$ autres. De sorte que, si la droite

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

lieu des traces sur le plan des xy des asymptotes parallèles à la direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$ ne change pas lorsque α et β varieront infiniment peu ou varieront dans de certaines limites, toutes les asymptotes correspondantes seront dans un même plan.

Or c'est précisément l'invariabilité de la droite

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0$$

qu'exprime l'équation (2).

En effet, si l'on fait varier, dans l'équation de cette droite, α de $d\alpha$ et β de $d\beta$, elle devient

$$\begin{aligned} &x_0(\varphi'_\alpha + \varphi''_{\alpha^2}d\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}d\beta) \\ &+ y_0(\varphi'_\beta + \varphi''_{\beta^2}d\beta + \varphi''_{\alpha\beta}d\alpha) + \psi(\alpha, \beta, 1) + \psi'_\alpha d\alpha + \psi'_\beta = 0, \end{aligned}$$

et si l'on veut exprimer que les deux droites coïncident, il faudra exprimer que les accroissements des coefficients sont proportionnels aux anciennes valeurs de ces coefficients, ce qui donnera

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}d\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}d\beta}{\varphi'_\alpha} = \frac{\varphi''_{\beta^2}d\beta + \varphi''_{\alpha\beta}d\alpha}{\varphi'_\beta} + \frac{\psi'_\alpha d\alpha + \psi'_\beta d\beta}{\psi(\alpha, \beta, 1)};$$

en divisant par $d\alpha$ et remplaçant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ par $-\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}$, ces équations deviennent

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2} - \varphi''_{\alpha\beta}\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}}{\varphi'_\alpha} = \frac{-\varphi''_{\beta^2}\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta} + \varphi''_{\alpha\beta}}{\varphi'_\beta} = \frac{\psi'_\alpha - \psi'_\beta\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}}{\psi(\alpha, \beta, 1)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha\varphi'^2_\beta} = \frac{-\varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha\varphi'^2_\beta} = \frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta - \psi'_\beta\varphi'_\alpha}{\varphi'_\alpha\psi(\alpha, \beta, 1)}.$$

La première de ces conditions

$$\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta = -\varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta$$

n'est autre que la condition (1) déjà traitée; quant à l'autre

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha\varphi'^2_\beta} = \frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta - \psi'_\beta\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta\psi(\alpha, \beta, 1)},$$

elle se réduit précisément à l'équation (2)

$$[\varphi''_{\alpha^2}\varphi'_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha]\psi(\alpha, \beta, 1) - \varphi'_\alpha[\psi'_\alpha\varphi'_\beta - \psi'_\beta\varphi'_\alpha] = 0.$$

Ainsi les équations (1) et (2) expriment que toutes les asymptotes de la section doivent être comprises dans m plans.

Quant à l'équation (3), il est inutile d'en chercher la traduction : puisqu'elle exprime que chacune des asymptotes coupe la surface en un troisième point situé à l'infini, *elle doit exprimer que chacun des m plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe de degré $m-3$.*

En conséquence, les surfaces de degré m, cubables algébriquement et contenant encore le plus grand nombre possible de paramètres, sous cette condition, devraient être recherchées parmi les surfaces ayant une courbe double de degré $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, que pourrait représenter l'équation

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)\ldots$$
$$\times(A_mx + B_my + C_mz + D_m) - \Phi_{m-3}(x, y, z) = 0,$$

Φ_{m-3} désignant un polynôme complet en x, y, z, de degré $(m-3)$ au plus.

28. *Application aux surfaces du troisième ordre.* — Les surfaces de troisième ordre capables de cubature

algébrique doivent être recherchées dans le type

$$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) \times (a_3x + b_3y + c_3z + d_3) + \mathrm{H} = 0.$$

Si l'on suppose la surface irréductible, la seule ligne double qu'elle pourra contenir sera une droite. Supposons qu'on ait pris cette droite pour axe des z, l'équation de la surface devra se réduire à une identité si l'on y fait $x = 0$ et $y = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} c_1c_2c_3 &= 0, \\ c_1c_2d_3 + c_2c_3d_1 + c_3c_1d_2 &= 0, \\ c_1d_2d_3 + c_2d_3d_1 + c_3d_1d_2 &= 0, \\ d_1d_2d_3 + \mathrm{H} &= 0; \end{aligned}$$

H ne pouvant être supposé nul, sans quoi la surface se réduirait à trois plans, d_1, ni d_2, ni d_3 ne sauraient non plus disparaître; en conséquence, c_1, c_2 et c_3 devront être nuls. C'est-à-dire que la surface devra être un cylindre parallèle à sa ligne double.

Les conditions précédentes expriment simplement que l'axe des z est sur la surface : pour que cette ligne soit double, il faut et il suffit que l'origine soit un point double de la trace du cylindre sur le plan des xy. Or, l'équation de cette trace, ou celle de la surface, est devenue

$$(a_1x + b_1y + d_1)(a_2x + b_2y + d_2) \times (a_3x + b_3y + d_3) - d_1d_2d_3 = 0;$$

et, si l'origine est un point double, cette trace sera quarrable algébriquement, c'est-à-dire sera un trèfle ou un folium, suivant que les trois asymptotes seront réelles ou qu'il y en aura deux imaginaires.

Les deux seules surfaces du troisième ordre, cubables algébriquement et dépendant encore du plus grand nombre possible de paramètres, sous cette condition,

sont donc le cylindre à base de trèfle et le cylindre à base de folium.

29. Le Tome II de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires* contient la théorie, analogue aux précédentes, des intégrales d'ordres supérieurs.

Sommaire de la théorie du développement en série, par la formule de Taylor, d'une fonction implicite y, définie par une équation algébrique $f(x, y) = 0$.

1. Pour qu'une série à termes imaginaires soit convergente, il faut que la série des parties réelles de tous ses termes et la série de leurs parties imaginaires soient séparément convergentes, c'est-à-dire que, si le terme général est représenté par $A_u + B_u\sqrt{-1}$, il faut, pour que la série soit convergente, que A_u et B_u, et par conséquent $\sqrt{A_u^2 + B_u^2}$, tendent vers zéro.

2. Une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable, et dont tous les coefficients sont finis, est toujours convergente lorsque la variable ne prend que des valeurs dont le module soit suffisamment petit.

3. Une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable reste convergente lorsque le module de la variable reste, si peu que ce soit, inférieur à une certaine limite, et devient divergente lorsque le module de la variable dépasse, de si peu que ce soit, cette même limite. Lorsque le module de la variable atteint la limite en question, la série est convergente ou

divergente, selon la valeur de la variable elle-même; mais la série, dans ce cas douteux, ne pourrait pas être utilisée comme étant trop peu convergente, si elle l'était; en sorte qu'il importe peu de savoir ce qu'il en est.

4. Une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable est convergente ou divergente, sauf les cas douteux, en même temps que toutes ses dérivées ou intégrales.

5. Si x_0 et y_0 sont deux valeurs, qui se correspondent, de la variable x et de la fonction y, définie par une équation algébrique $f(x, y) = 0$, la série

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

qui reste convergente tant que le module de $(x - x_0)$ reste suffisamment petit, mais à condition qu'aucun des coefficients différentiels $\left(\frac{dy}{du}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{du_2}\right)_0, \cdots$ ne soit infini, définit l'ordonnée d'un lieu tel que, si aux deux équations $f(x, y) = 0$ d'une part et $y =$ la série, de l'autre, on adjoignait une même relation complémentaire quelconque $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta',) = 0$, les deux courbes déterminées, sur les deux lieux superficiels, par cette condition, auraient au point $[x_0, y_0]$ un contact d'ordre infini, c'est-à-dire se confondraient dans une étendue plus ou moins grande à partir du point $[x_0, y_0]$

6. Les ordonnées des deux lieux superficiels

$$f(x, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \text{la série}$$

se confondront donc aussi dans un intervalle plus ou moins étendu, c'est-à-dire que la série fournira, dans un intervalle plus ou moins étendu, la valeur de la fonction y définie par l'équation $f(x, y) = 0$.

7. Mais l'identité des deux fonctions ne sera jamais complète, d'abord parce que la série ne restera pas toujours convergente et que, devenue divergente, elle ne définirait plus aucune fonction; en second lieu parce que la fonction y, définie par l'équation $f(x, y) = 0$, aurait toujours m valeurs, pour toute valeur de x, si l'équation $f(x, y) = 0$ était de degré m par rapport à y, tandis que la fonction définie par la série, supposée convergente, n'en aura jamais qu'une.

8. La série ne définira donc jamais qu'un segment de la fonction y, définie par l'équation $f(x, y) = 0$, et l'identité des deux fonctions ne s'étendrait en tous cas que jusqu'aux valeurs de x telles que le module de $(x - x_0)$ restât assez petit pour que la série elle-même restât convergente.

9. Les solutions de l'équation $y =$ la série formeront plaque sur le tableau, comme celles de l'équation $f(x, y) = 0$, mais la première plaque ne sera jamais qu'une portion de la seconde. Cette première plaque s'appellera la *région de convergence* et le lieu des points situés sur son contour s'appellera le *périmètre de la région de convergence*.

10. La valeur que ne devrait pas dépasser le module de $(x - x_0)$, pour que la série restât convergente, dépend, par rapport au lieu $f(x, y) = 0$, du système des deux valeurs initiales x_0 et y_0 de x et de y. Si k est la valeur qui convient, en raison de la position du point origine $[x_0, y_0]$, le périmètre de la région de convergence sera défini, quant aux abscisses de ses points, par la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = k^2,$$

et quant à ses ordonnées, par les deux équations contenues dans

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1}, \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

auxquelles on joindrait les équations

$$x_1 = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

11. L'équation du périmètre de la région de convergence sera toujours algébrique, si l'on suppose algébrique l'équation $f(x, y) = 0$; mais la courbe représentée par cette équation fournirait beaucoup de branches parasites. Il faudrait en effet éliminer toutes celles de ces branches, en nombre $m - 1$, dont les ordonnées ne satisferaient pas à l'équation $y =$ la série.

12. Lorsqu'une fonction atteint une valeur infinie pour une valeur finie de sa variable, toutes ses dérivées deviennent aussi infinies; lorsqu'une des dérivées d'une fonction devient infinie, toutes les suivantes le deviennent aussi.

13. Un point d'un lieu où, soit l'ordonnée et ses dérivées, soit une des dérivées de l'ordonnée et toutes les suivantes, deviennent infinies, ne peut jamais se trouver dans l'intérieur de la région de convergence, puisque, dans l'hypothèse contraire, ou bien la série pourrait prendre une valeur infinie et rester convergente, ou bien ce serait une des dérivées de la série qui pourrait prendre une valeur infinie et rester convergente.

Mais il se trouvera toujours au moins un de ces points sur le périmètre de la région de convergence, parce que celles des dérivées de la fonction qui deviendraient infinies au delà de la région de convergence

acquerront déjà, en deçà, des valeurs très grandes fournies encore par les dérivées correspondantes de la série primitive; et que la divergence ne pourra se produire, pour ces séries dérivées, qu'à l'instant où elles devraient acquérir des valeurs infinies.

Les séries dérivées, d'ordres moins élevés, tomberont alors dans le cas douteux et seront sur le point de devenir divergentes, comme on l'a dit plus haut, en ce sens seulement que le terme général n'y tendra plus vers zéro, ce qui ne veut pas dire que la somme d'un assez grand nombre des premiers termes croîtrait indéfiniment.

14. Les points particuliers dont il vient d'être question prennent le nom de *points critiques* du lieu en question. Les uns, comme les points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y, varient dans le lieu avec la direction de l'axe des y; les autres, au contraire, comme la plupart des points de rebroussement, restent fixes dans le lieu.

15. La première chose à faire pour préparer la discussion de la série suivant laquelle se développe l'ordonnée d'un lieu est de déterminer exactement tous les points critiques de ce lieu.

A cet égard, on remarquera d'abord que les dérivées d'une fonction ne peuvent devenir infinies, à partir d'un certain ordre, qu'aux points où cette fonction a acquis plusieurs valeurs égales.

On commencera donc par relever tous les points du lieu où plusieurs valeurs de l'ordonnée se confondraient.

Soient x et y les coordonnées de l'un d'eux et p son degré de multiplicité. Si les dérivées premières de ces p valeurs de y sont toutes finies et différentes, leurs déri-

vées d'ordres plus élevés resteront toutes finies et le point en question ne sera pas critique.

Si $p-q$ de ces dérivées se séparent des autres, sans devenir infinies, et ont des valeurs distinctes, le point considéré ne sera pas critique relativement aux formes correspondantes de la fonction y.

Si, sur les q dérivées restantes, $q-r$ se séparent des autres en devenant infinies, le point en question sera critique par rapport aux $q-r$ formes correspondantes de la fonction y.

On ne pourra encore rien dire relativement aux r dernières formes de la fonction, mais on les dérivera de nouveau jusqu'à ce que les dérivées ultérieures se séparent ou deviennent infinies, ce qui arrivera tôt ou tard, parce que, si les dérivées des ordonnées de quelques branches du lieu restaient indéfiniment confondues, ces deux branches auraient entre elles un contact d'ordre infini, ou se confondraient elles-mêmes, ce qui ne saurait arriver dans un lieu algébrique irréductible, comme on doit toujours supposer que soit le lieu en discussion.

16. Tous les points critiques du lieu étant ainsi déterminés, la question de la convergence de la série suivant laquelle l'ordonnée y du lieu aurait été développée, à partir d'un point origine $[x_0, y_0]$, non critique, se réduira à savoir lequel de tous les points critiques se trouvera sur le périmètre de la région de convergence et déterminera ce périmètre, ainsi que la région enveloppée.

La méthode à suivre pour résoudre cette question consistera à écarter successivement tous ceux des points critiques où ne pourrait pas se rendre un point mobile $[x, y]$, parti du point $[x_0, y_0]$, sans que le module de $[x-x_0]$ eût dû dépasser momentanément celui de la

différence entre x_0 et l'abscisse d'un autre point critique $[x_1, y_1]$ où aurait pu se rendre d'abord le point $[x_1 y]$, pour parvenir au point essayé.

Le tableau dressé d'avance des deux enveloppes et de toutes les conjuguées, surtout de celles qui passeraient par les points critiques du lieu, facilitera singulièrement la solution de la question précédente, parce que, si, pour se rendre du point $[x_0, y_0]$ à un point critique $[x_n, y_n]$, le point $[x, y]$ devait forcément traverser la conjuguée qui passerait en un autre point critique $[x_1, y_1]$ et si, pouvant se rendre sur cette dernière conjuguée ou sur celle des enveloppes qui l'y toucherait, il pouvait s'approcher indéfiniment du point $[x_1, y_1]$ sans que le module de $(x - x_0)$ dépassât celui de $(x_1 - x_0)$, le point critique $[x_n, y_n]$ devrait évidemment être écarté en présence du point $[x_1, y_1]$, puisque la série serait déjà devenue divergente pour $x = x_1$.

On arrivera ainsi à déterminer sûrement le point d'arrêt de la convergence, sans autre difficulté que celle que présentera la complication de l'équation du lieu.

17. On s'aidera puissamment dans cette discussion en s'appuyant sur cette observation presque intuitive que, si le point $[x, y]$ peut, sans sortir de la région de convergence, se rendre sur une conjuguée tangente à l'enveloppe réelle, en un point critique, il ne pourra pas passer sur cette enveloppe et réciproquement. En effet, si $[x_1, y_1]$ est ce point critique, le module de $[x_0 - x_1]$ sera toujours compris entre les modules des différences entre x_0 et les abscisses de deux points pris l'un sur l'enveloppe et l'autre sur la conjuguée, à des distances infiniment petites du point $[x_1, y_1]$.

18. Si l'on déplaçait d'une manière continue le point

origine $[x_0, y_0]$, la région de convergence se déformerait aussi d'une manière continue; le périmètre de cette région pivoterait d'abord autour de l'ancien point d'arrêt, il viendrait, à un instant donné, passer par un nouveau point critique et abandonnerait ensuite le premier pour pivoter autour du second, et ainsi de suite.

19. J'ai nommé *courbe d'équilibre* entre deux points critiques le lieu sur lequel pourrait se déplacer le point origine $[x_0, y_0]$ sans que le périmètre de la région de convergence cessât de passer à la fois par ces deux points critiques.

La considération de ces courbes d'équilibre facilite singulièrement la fixation du point d'arrêt et ses déplacements intermittents, lors du déplacement continu du point origine.

20. Lorsque, en raison de la situation du point origine $[x_0, y_0]$ dans le lieu, le point $[x, y]$, parti de ce point, pourra, par des mouvements en sens contraires, se rendre indifféremment à l'un ou l'autre de deux points critiques, sans en dépasser d'autres, on appliquera la règle de Cauchy, c'est-à-dire qu'on prendra pour point d'arrêt celui des deux points critiques dont l'abscisse retranchée de x_0 donnerait le moindre module.

21. Soit d'abord pris pour exemple le lieu

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 b^2 = 0,$$

les deux points critiques sont $[x = +a, y = 0]$ et $[x = -a, y = 0]$, où $\frac{dy}{dx}$ devient infini.

La courbe d'équilibre entre ces deux points est caractérisée par l'équation

$$(\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2 = (\alpha_0 + a)^2 + \beta_0^2 \qquad \text{ou} \qquad \alpha_0 = 0;$$

c'est donc celle des conjuguées de l'ellipse qui la touche en ses sommets situés sur l'axe des y. Ainsi, si le point $[x_0, y_0]$ appartient à cette conjuguée, le périmètre de la région de convergence passera à la fois par les deux sommets placés sur l'axe des x.

Pour que le point d'arrêt soit $[x = +a, y = 0]$, il faudra que α_0 et β_0 satisfassent à l'inégalité

$$(\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2 < (\alpha_0 + a)^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire que α_0 soit positif, ou que le point $[x_0, y_0]$ appartienne à une branche de conjuguée tangente à l'ellipse en un point du premier ou du quatrième quadrant.

Quelque part que le point $[x_0, y_0]$ soit placé sur le lieu, le point $[x, y]$ fourni par l'équation $y =$ la série (supposée convergente) ne pourra jamais traverser l'arc des x pour passer d'une des branches sur l'autre, de la courbe réelle ou de la conjuguée $c = \varkappa$, car autrement la série pourrait fournir deux valeurs de y pour une même valeur de x.

Cette remarque sera souvent utilisable. Dans tous les cas analogues, le point d'arrêt sera toujours un point de rebroussement pour le périmètre de la région de convergence.

Le point d'arrêt restant fixé au point $[x = +a, y = 0]$, c'est-à-dire α_0 restant positif, supposons qu'on veuille savoir si le point mobile $[x, y]$ pourra passer sur la courbe réelle ou sur la conjuguée $c = \varkappa$: il faudra pour cela remarquer que, pour que le point $[x, y]$ reste dans l'intérieur de la région de convergence, le module de $(x - x_0)$, ou

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2,$$

devra rester moindre que celui de $(a - x_0)$, ou

$$(a - \alpha_0)^2 + \beta_0^2.$$

mais que, si le point $[x, y]$ doit se trouver sur la courbe réelle ou sur la conjuguée $c = \infty$, β, alors, sera nul, ce qui réduira la condition précédente à

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < (a - \alpha_0)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$a^2 - 2\alpha_0 \alpha + 2 a \alpha_0 - a^2 < 0.$$

Les racines de l'équation à zéro de ce trinôme sont

$$\alpha_0 + (a - \alpha_0) \quad \text{et} \quad \alpha_0 - (a - \alpha_0),$$

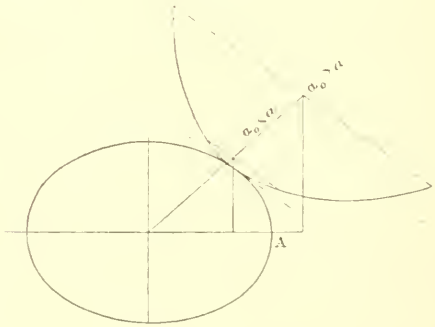
de sorte que, pour que le trinôme soit négatif, il faudra que α varie entre

$$\alpha_0 + (a - \alpha_0) \quad \text{et} \quad \alpha_0 - (a - \alpha_0);$$

si $\alpha_0 = a = h$, le maximum sera a et le minimum $a - 2h$; et si $\alpha_0 = a + h$, le minimum sera a et le maximum $a + 2h$.

Ainsi le point $[x, y]$, représenté par l'équation $y =$ la série, ne pourra jamais passer de la courbe réelle sur la conjuguée $c = \infty$ ou réciproquement.

Fig. 28.



Il pourra passer sur la courbe réelle si $\alpha_0 < a$, et sur la conjuguée $c = \infty$ si $\alpha_0 > a$ (*fig.* 28).

Si α_0 était égal à a, le périmètre de la région de con-

vergence n'aurait que le point A de commun soit avec la courbe réelle, soit avec la conjuguée $c = \infty$.

On pourrait aisément construire le périmètre de la région de convergence pour une position donnée du point $[x_0, y_0]$, et déterminer la portion de chaque conjuguée dont les ordonnées pourraient être fournies par la série.

22. Considérons maintenant le lieu

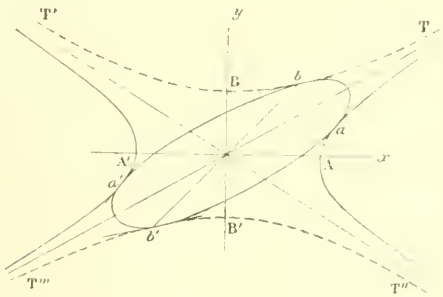
$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2 :$$

les points critiques sont

$$[x = +a, y = 0] \quad \text{et} \quad [x = -a, y = 0].$$

La courbe d'équilibre est caractérisée comme dans l'exemple précédent par la condition $\alpha_0 = 0$. Cette courbe

Fig. 29.



est l'enveloppe imaginaire des conjuguées, TBT'T''B'T''' fournie par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \beta'\sqrt{-1}$$

de l'équation du lieu (*fig.* 29).

Pour que le point d'arrêt soit le point A, il faut que $\alpha_0 > 0$, c'est-à-dire, si le point $[x_0, y_0]$ appartient à la

conjuguée $bab'a'$, pour que le point d'arrêt soit le point A, il faut que le point $[x_0, y_0]$ soit placé sur la branche bab'.

23. Soit encore le lieu

$$a^2y^2 = b^2x^3 = -a^2b^2;$$

les deux points critiques sont

$$[x = \pm a\sqrt{-1}, y = 0];$$

la courbe d'équilibre est caractérisée par la condition

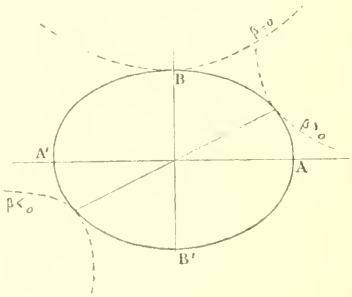
$$\alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2 = \alpha_0^2 + (\beta_0 + a)^2$$

ou

$$\beta_0 = 0 :$$

c'est la conjuguée à abscisses réelles, laquelle touche l'en-

Fig. 30.



veloppe imaginaire ABA'B' en ses sommets situés sur l'axe des y (*fig.* 30).

Pour que le point A soit le point d'arrêt, il faudra que

$$\alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2 < \alpha_0^2 + (\beta_0 + a)^2$$

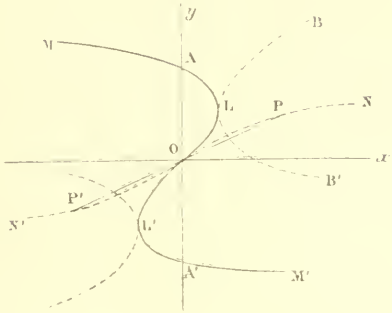
ou que β_0 soit positif; c'est-à-dire que le point origine se trouve sur une demi-conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point de l'axe BAB'.

24. Soit le lieu

$$y^2 - a^2 y - a^2 x = 0.$$

l'enveloppe réelle des conjuguées est MALOL'A'M' et l'enveloppe imaginaire NON' (*fig.* 31).

Fig. 31.



Les deux seuls points critiques sont L et L',

$$y = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad x = \pm \frac{2a}{3\sqrt{3}}.$$

Supposons d'abord que le point origine $[x_0, y_0]$ se trouve sur une branche de demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LAM et cherchons à quelles conditions le point mobile $[x, y]$, fourni par l'équation $y =$ la série, pourrait passer sur la courbe réelle, ou sur la conjuguée $c = \varkappa$, près du point L, sans que le module de $[x - x_0]$ dépassât celui de $\left(\frac{2a}{3\sqrt{3}} - x_0\right)$. β devant être nul, il faudrait pour cela que α satisfît à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < \left(\frac{2a}{3\sqrt{3}} - \alpha_0\right)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$(\alpha - \alpha_0)^2 - \left(\frac{2a}{3\sqrt{3}} - \alpha_0\right)^2 < 0,$$

c'est-à-dire que α devrait rester compris entre les limites

$$2\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{3\sqrt{3}}.$$

Si donc α_0 est moindre que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ et égal à $\frac{2a}{3\sqrt{3}} - h$, α pourra varier entre

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}} - 2h, \text{ limite inférieure,}$$

et

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}}, \text{ limite supérieure.}$$

et le point $[x, y]$, fourni par la série, ne pourra pas passer sur la conjuguée $c = \infty$ près du point L.

Au contraire, si α_0 est plus grand que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ et égal à $\frac{2a}{3\sqrt{3}} + h$, α pourra varier entre

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}} + 2h, \text{ limite supérieure,}$$

et

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}}, \text{ limite inférieure;}$$

le point $[x, y]$ ne pourra donc pas passer sur l'arc LAM.

Supposons le premier cas, c'est-à-dire $\alpha_0 = \frac{2a}{3\sqrt{3}} - h$, le point $[x, y]$ ne pouvant pas passer sur l'arc BLB', sans que la série devienne divergente, ne pourra pas, à plus forte raison, se rendre en L' : le point d'arrêt sera donc L.

Il en sera encore de même dans le second cas, ou α_0 aurait une valeur $\frac{2a}{3\sqrt{3}} + h$, mais on en donnera une autre raison qui est que le module de (x_0 — l'abscisse de L) sera alors moindre que celui de (x_0 — l'abcisse de L') ; en effet, le premier sera

$$h^2 + \beta_0^2.$$

et le second

$$\left(h - \frac{4a}{3\sqrt{3}}\right)^2 - \beta_0^2.$$

Ainsi, quelque part que l'on plaçât le point origine, sur une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc MAL, le point d'arrêt serait toujours L.

De même, le point d'arrêt serait L', si le point $[x_0, y_0]$ appartenait à une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc M'A'L'.

Cherchons maintenant la courbe d'équilibre entre les deux points L et L'. L'équation caractéristique de cette courbe est

$$\text{mod}\left(x_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) = \text{mod}\left(x_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right),$$

c'est-à-dire

$$\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2 = \left(\alpha_0 + \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$\alpha_0 = 0.$$

Cette condition paraîtrait comporter deux interprétations : la première que le milieu de la corde réelle passant par le point $[x_0, y_0]$ se trouvât sur l'axe des y, et la seconde que le point $[x_0, y_0]$ appartînt à l'enveloppe imaginaire des conjuguées dont les coordonnées sont imaginaires sans parties réelles.

Mais l'inspection de la figure montre que, pour qu'une corde réelle d'une conjuguée eût son milieu sur l'axe des y, il faudrait que cette conjuguée touchât la courbe réelle en un point de l'une de ses branches AM ou A'M', et l'on a vu que le point d'arrêt est alors L ou L'.

La condition $\alpha = 0$ signifie donc que le point origine doive appartenir à l'enveloppe imaginaire des conjuguées; et le fait s'explique alors tout naturellement, car il est facile de voir que, si le point $[x_0, y_0]$ se trouve sur l'en-

veloppe imaginaire, il pourra se rendre à l'origine sans sortir de la région de convergence; or il lui resterait alors juste le même chemin pour parvenir en L ou en L'.

Cela posé, si le point $[x_0, y_0]$ appartient à une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LOL', le point d'arrêt sera L ou L', selon qu'on aura

$$\frac{-2a\alpha_0}{3\sqrt{3}} \quad \text{ou} \quad \frac{2a\alpha_0}{3\sqrt{3}},$$

c'est-à-dire suivant que α_0 sera positif ou negatif; ou encore selon que le point origine appartiendra à une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OL ou en un point de l'arc OL'.

Enfin supposons que le point origine appartienne à une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire : les conditions pour que le point d'arrêt soit en L ou en L' seront toujours

$$\alpha_0 > 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_0 < 0;$$

mais il faut en avoir l'interprétation. Or, sur chacune des demi-conjuguées en question, les deux parties où α aura des signes contraires seront séparées par le point de contact avec l'enveloppe imaginaire; et le reste va de soi. En effet, les deux points P et P' où une même conjuguée touche l'enveloppe imaginaire ont respectivement pour coordonnées

$$x = \beta\sqrt{-1} \qquad \text{avec} \qquad y = \beta'\sqrt{-1}$$

et

$$x = -\beta\sqrt{-1} \qquad \text{avec} \qquad y = -\beta'\sqrt{-1},$$

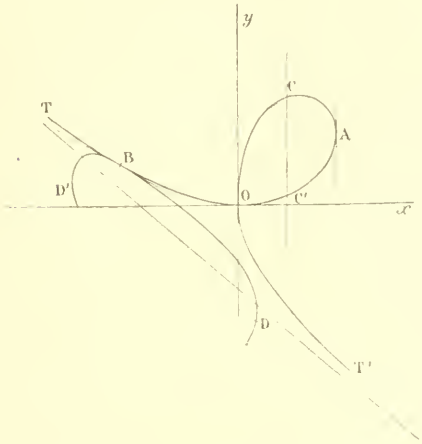
de sorte que POP' est précisément une des cordes réelles de la conjuguée: les autres lui sont parallèles, de sorte que la condition $\alpha_0 > 0$ exprime que le point $[x_0, y_0]$ se trouve, sur la conjuguée où on l'a placé, à l'extrémité

d'une corde réelle placée au-dessous de la corde qui joint les points de contact de cette conjugnée avec l'enveloppe et la condition $\alpha < 0$ exprime le fait contraire.

25. Considérons infini le lieu

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$

Fig. 32.



Les points critiques sont : l'origine $[x = 0, y = 0]$, le point A (*fig.* 32)

$$\left[x = a\sqrt[3]{4},\ y = a\sqrt[3]{2}\right]$$

et deux points imaginaires ; le point D

$$\left[x = a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\ y = a\sqrt[3]{2}\,\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right]$$

et le point D'

$$\left(x = a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\ y = a\sqrt[3]{2}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right).$$

Ces deux derniers appartiennent à la conjuguée

$$C = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

tangente à la courbe réelle en B et à l'enveloppe imaginaire en D et D'.

Les asymptotes imaginaires du lieu étant

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} x + \frac{a}{2}(1 \mp \sqrt{3}\sqrt{-1}),$$

on construirait aisément celles de la conjuguée DBD'.

Nous placerons d'abord le point origine $[x_0, y_0]$ sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OT', parce que, pour s'approcher successivement des points O, A, D ou D', un point $[x, y]$ du lieu, qui partirait du point $[x_0, y_0]$, ainsi placé, devrait passer successivement sur toutes les conjuguées du lieu, le point de contact avec la courbe réelle de la branche qui le contiendrait décrivant cette courbe réelle dans le sens T'OCAC'OBT, et que, comme le prouvera la discussion, c'est précisément dans l'ordre O, A, D ou D' que se présenteront les points d'arrêt, lorsque le point originaire $[x_0, y_0]$ s'avancera sur les conjuguées du lieu, dans l'ordre qu'on vient d'indiquer pour le point $[x, y]$.

Le point $[x_0, y_0]$ appartenant, comme on l'a supposé, à une conjuguée du lieu, tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OT', le point $[x, y]$, représenté par l'équation $y =$ la série, pourra passer sur la branche réelle T'O, près du point O, si l'on peut trouver sur cet arc T'O un point $[x = \alpha, y = \alpha']$, tel que

$$\text{mod}(x_0 - \alpha) < \text{mod}(x_0 - 0),$$

ou que

$$(\alpha_0 - \alpha)^2 + \beta_0^2 < \alpha_0^2 + \beta_0^2.$$

c'est-à-dire

$$2\alpha\alpha_0 - \alpha^2 > 0,$$

ou, comme α devrait être positif,

$$\alpha < 2\alpha_0,$$

ce qui exigera que α_0 soit positif, c'est-à-dire que le point $[x_0, y_0]$ ne soit pas trop éloigné du point de contact avec la branche T'O de la conjuguée à laquelle il appartiendrait.

Mais dans ce cas, de $\alpha_0 > 0$, le point $[x, y]$ fourni par la série ne pourra pas passer sur la branche de la conjuguée $C = \infty$ tangente de O à la courbe réelle; il ne pourra donc pas, à plus forte raison, se rendre près du point A ni près de l'un des points D ou D', et le point O sera le point d'arrêt de la convergence de la série.

Au contraire, dans la même hypothèse où la branche de conjuguée contenant le point $[x_0, y_0]$ toucherait la courbe réelle en un point de l'arc T'O, si α_0 était négatif, le point $[x, y]$ fourni par la série ne pourrait plus passer sur l'arc T'O, mais pourrait passer la branche de la conjuguée $C = \infty$ tangente à la courbe réelle en O, parce que l'on pourrait trouver sur cette branche un point

$$(x = -\alpha, y = \alpha' \pm \beta' \sqrt{-1}),$$

tel que

$$\text{mod}(x_0 + \alpha) < \text{mod}(x_0 - 0),$$

ou que

$$(\alpha_0 + \alpha)^2 + \beta_0^2 < \alpha_0^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire

$$2\alpha\alpha_0 + \alpha^2 < 0$$

ou

$$\alpha < -2\alpha_0.$$

Mais alors le point $[x, y]$ fourni par la série, ne

pourrait pas parvenir au point A, parce que le module de $(x_0 - a\sqrt[3]{4})$ serait plus grand que celui de $(x_0 - O)$. En effet, α_0 étant négatif, le premier module

$$(\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2$$

serait plus grand que le second

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2.$$

Ainsi, dans ces différents cas, le point O sera et restera le point d'arrêt.

Supposons que le point origine $[x_0, y_0]$ vienne du plan sur une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OCA. Le point d'arrêt restera le point O tant que le point $[x_0, y_0]$ n'aura pas traversé la courbe d'équilibre entre O et A, courbe dont l'équation caractéristique est

$$\operatorname{mod}(x_0 - O) = \operatorname{mod}(x_0 - a\sqrt[3]{4})$$

ou

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 = (\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2.$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 = \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Ainsi le point d'arrêt restera le point O tant que le milieu de la corde réelle contenant le point $[x_0, y_0]$ restera à gauche de la droite CC', équidistante de l'axe des y et de la tangente menée en A à la courbe réelle.

Le périmètre de la région de convergence passera à la fois en O et en A lorsque le milieu de la corde réelle contenant le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur le prolongement de C'C.

Enfin le point d'arrêt se trouvera en A lorsque le milieu de la corde réelle contenant le point $[x_0, y_0]$ se trouvera à droite de C'C.

A partir de ce moment, le périmètre de la région de

convergence pivotera autour du point A jusqu'à ce que le point $[x_0, y_0]$ vienne traverser l'une ou l'autre des courbes d'équilibre entre A et D ou entre A et D'.

La première de ces deux courbes est caractérisée par la condition

$$\text{mod}\,(x_0 - a\sqrt[3]{4}) = \text{mod}\left(x_0 - a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right),$$

qui se réduit à

$$-\alpha_0\sqrt[2]{3} = -\beta_0$$

et la seconde l'est par

$$-\alpha_0\sqrt[2]{3} = \beta_0.$$

On voit que les premiers membres resteraient moindres que les seconds si le point $[x_0, y_0]$ venait se placer sur la branche de la conjuguée $C = \infty$, tangente en A à la courbe réelle, parce que α_0 serait positif et β_0 nul; par conséquent, le point A serait encore à ce moment le point d'arrêt.

Supposons que le point $[x_0, y_0]$ vienne se placer sur une branche de conjuguées tangente à la courbe réelle en un point de l'arc AO : α_0 sera d'abord positif; quant à β_0, qui partira de zéro, il sera positif ou négatif, selon que le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur la branche de droite ou sur la branche de gauche de la conjuguée qui le contiendra, en sorte que, si le point $[x_0, y_0]$ se trouve sur la branche de droite de la conjuguée en question, ce sera le point D qui pourra devenir le point d'arrêt, et que si, au contraire, le point $[x_0, y_0]$ se trouve sur la branche de gauche de la même conjuguée, ce sera le point D' qui pourra succéder au point A, comme point d'arrêt.

Si l'on suppose le premier cas, c'est-à-dire $p_0 > 0$, le point D deviendra le point d'arrêt, au lieu du point A,

dès que

$$-\alpha_0\sqrt{3} \text{ deviendra plus grand que } -\beta_0 \ (\beta_0 \text{ étant positif});$$

dans le second cas, le point D′ deviendra le point d'arrêt, au lieu du point A, dès que

$$-\alpha_0\sqrt{3} \text{ deviendra plus grand que } \beta_0 \ (\beta_0 \text{ étant négatif}).$$

α_0 prenant d'abord la valeur de l'abscisse du point de contact de la branche de la conjuguée dont il s'agit avec l'arc AO et β_0 étant alors nul, ni l'une ni l'autre des deux conditions ne se rencontrera que sur une corde réelle de la conjuguée, assez éloignée de son point de contact avec l'arc AO et jusque-là ce sera le point A qui restera le point d'arrêt.

Au delà de cette corde réelle, ce sera le point D ou le point D′ qui deviendra le point d'arrêt, suivant que le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur la branche de droite ou sur la branche de gauche de la conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc AO.

Si le point $[x_0, y_0]$ vient se placer sur la conjuguée à ordonnées réelles, tangente à la branche T′OA en O, la valeur de y_0 s'exprimera par

$$y_0 = \alpha'_0 \quad (\alpha'_0 \text{ étant négatif})$$

et les valeurs de x_0 seront fournies par l'équation

$$x_0^3 - 3a\alpha'_0 x - \alpha'^3_0 = 0;$$

la racine réelle de cette équation serait l'abscisse positive du point de rencontre de la branche OT′ avec la droite $y = \alpha'_0$, mais ce point de rencontre n'entre pas en question. Les deux autres racines seront

$$x_0 = \alpha_0 \pm \beta_0\sqrt{-1};$$

leur somme $2\alpha_0$, ajoutée à l'abscisse du point situé sur la branche OT′ devra donner une somme nulle, par conséquent α_0 devra être négatif.

En conséquence, ni la condition

$$-\alpha_0\sqrt{3} < -\beta_0$$

ne pourra être satisfaite par un point $[x_0, y_0]$ de la branche de droite de la conjuguée en question, et le point D aura définitivement succédé au point A comme point d'arrêt, même en supposant le point $[x_0, y_0]$ indéfiniment voisin du point O; ni la condition

$$-\alpha_0\sqrt{3} < \beta_0$$

ne pourra être satisfaite par un point $[x_0, y_0]$ de la branche de gauche de la même conjuguée en question, et le point D′ aura définitivement succédé au point A comme point d'arrêt, même en supposant le point $[x_0, y_0]$ indéfiniment voisin du point O.

Supposons enfin que le point $[x_0, y_0]$ passe sur une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OT : la courbe d'équilibre entre les points D et D′ étant

$$\begin{aligned}&\operatorname{mod}\left(x_0 - a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right)\\ &\quad = \operatorname{mod}\left(x_0 - a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 - \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2}\right)^2\\ &\quad = \left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2}\right)^2,\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\beta_0 = 0$.

On voit que le périmètre de la région de convergence passera à la fois par les deux points D et D′ lorsque le point $[x_0, y_0]$ se trouvera être justement le point de contact, avec l'arc OBT, de la branche de conjuguée sur

laquelle il aura passé, et que le point d'arrêt sera D ou D', selon que β_0 sera positif ou négatif, c'est-à-dire selon que le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur la branche de droite ou sur la branche de gauche de la conjuguée sur laquelle il aura passé.

Sur la convergence du développement en série d'une fonction de deux variables indépendantes. — On trouvera dans le second Volume de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires* ce qui concerne la convergence du développement en série, par la formule de Taylor, d'une fonction de deux variables indépendantes X et Y, définie par une équation

$$f(X, Y, Z) = 0.$$

Cette question, entièrement neuve à l'époque [1], est ramenée à la précédente par cette considération évidente que le développement

$$\begin{aligned} Z = z &+ \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{(X - x)^2}{1.2} + \ldots \\ &- \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y) - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{(X - x)(Y - y)}{1.2} + \ldots \\ &- \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{(Y - y)^2}{1.2} + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ordonnée en groupes homogènes par rapport à $(X - x)$ et à $(Y - y)$, coïncide identiquement, pour chaque système de valeurs finales de X et de Y, avec le développement de la fonction Z de X seul, qui serait définie par les équations

$$f(X, Y, Z) = 0$$

---

[1] Elle n'avait été traitée auparavant que par MM. Briot et Bouquet, dans leur *Théorie des fonctions doublement périodiques*.

et

$$\frac{Y - y}{X - x} = k,$$

k étant la valeur que prendrait le rapport $\frac{Y - y}{X - x}$ pour les valeurs finales qu'on aurait résolu d'avance de donner à X et à Y ; de sorte que la question n'est autre que celle du développement de l'ordonnée Z de la projection, sur le plan des XZ, de la section de la surface

$$f(X, Y, Z) = 0$$

par le plan

$$\frac{Y - y}{X - x} = k.$$

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE PLANE

Pages

Généralités 1

Représentation d'un point du plan des axes par la solution $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ d'une équation $f(x, y) = 0$. 1

Les solutions imaginaires $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ d'une équation à deux variables $f(x, y) = 0$ présentent une double indétermination 5

Conjuguée des coniques 9

Des éléments d'un lieu en un de ses points et de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu 15

De la ligne droite 21

Des tangentes aux courbes imaginaires 25

Quelques propriétés de l'enveloppe imaginaire 31

Des asymptotes aux courbes imaginaires 34

Théorie des contacts des divers ordres des courbes imaginaires et, en particulier, de leur courbure 40

Quadratures 54

Une seule intégration suffit aux quadratures du lieu réel et de toutes ses conjuguées 54

De la valeur concrète la plus simple d'une intégrale, en raison de ses limites 60

Théorème de l'indépendance de la valeur d'une intégrale $\int y\,dx$ envers le chemin suivi pour en rejoindre les deux limites 63

Des périodes des intégrales 71

De la manière la plus générale dont s'engendrent les périodes correspondant au parcours des anneaux fermés de l'une des deux enveloppes 80

Pages.

De la manière la plus générale dont s'engendrent les périodes correspondant au parcours des anneaux fermés des conjuguées. 82
Sur une forme géométrique singulière que peuvent affecter les périodes engendrées dans le parcours d'une des enveloppes.. 84
Condition pour que l'aire comprise entre une branche de courbe et son asymptote soit finie..... 86
Des périodes cycliques ou logarithmiques..... 90
Relation entre les m périodes cycliques d'un lieu de degré m.. 92
Les périodes cycliques de la quadratrice d'une courbe algébrique de degré m sont les produits par $2\pi\sqrt{-1}$ des racines d'une équation algébrique de degré m, manquant de second terme, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de ceux de l'équation de la courbe..... 95
Classification des quadratrices des courbes algébriques d'après le nombre et l'espèce de leurs périodes..... 97
Les périodes de la quadratrice d'une courbe algébrique peuvent encore disparaître en devenant infinies..... 100
D'une réduction accessoire d'une nouvelle unité dans le nombre des périodes de la quadratrice, au moment de la formation d'un point double à distance finie dans la courbe correspondante..... 102
Des autres conditions dans lesquelles peuvent se produire des réductions dans le nombre des périodes..... 104
Du nombre maximum de points doubles et du nombre maximum de périodes non cycliques..... 105
Détermination de la courbe la plus générale du troisième degré quarrable algébriquement..... 108

Sur la rectification des courbes planes..... 113
Précis d'une théorie rationnelle des fonctions circulaires directes et inverses..... 113
Précis d'une théorie rationnelle des fonctions exponentielle et logarithmique..... 117

Sur les fonctions elliptiques..... 122

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Généralités..... 123
De la cubature des surfaces, et des périodes des intégrales doubles..... 133
Toutes les conjuguées fermées d'une même surface, inscrites dans la même nappe de la surface réelle, enveloppent des volumes égaux..... 135

Pages.

Classification des intégrales doubles cubatrices des surfaces algébriques 145

Application aux surfaces de troisième ordre 149

Sommaire de la théorie du développement en série, par la formule de Taylor, d'une fonction implicite y, définie par une équation algébrique $f(x, y) = 0$ 151

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

16590 Paris — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

JAMIN (J.), Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, et **BOUTY**, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours de Physique à l'usage de la classe de Mathématiques spéciales.** 2e édition. Deux volumes in-8, avec 458 figures dans le texte et 6 planches sur acier; 1886. 20 fr.

On vend séparément :

Tome I : *Instruments de mesure. Hydrostatique. — Optique géométrique. — Notions sur les phénomènes capillaires.* In-8, avec 312 figures dans le texte et 4 planches..... 10 fr.

Tome II : *Thermométrie. Dilatations. — Calorimétrie.* In-8, avec 146 figures dans le texte et 2 planches..... 10 fr.

MARIE (**Maximilien**), Répétiteur de Mécanique et Examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique. — **Histoire des Sciences mathématiques et physiques.** Petit in-8, caractères elzévirs, titre en deux couleurs.

Tome I. — Première période : *De Thalès à Aristarque.* — Deuxième période : *D'Aristarque à Hipparque.* — Troisième période : *D'Hipparque à Diophante;* 1883..... 6 fr.

Tome II. — Quatrième période : *De Diophante à Copernic.* — Cinquième période : *De Copernic à Viète;* 1883..... 6 fr.

Tome III. — Sixième période : *De Viète à Kepler.* — Septième période : *De Kepler à Descartes;* 1883..... 6 fr.

Tome IV. — Huitième période : *De Descartes à Cavalieri.* — Neuvième période : *De Cavalieri à Huygens;* 1884..... 6 fr.

Tome V. — Dixième période : *De Huygens à Newton.* — Onzième période : *De Newton à Euler;* 1884..... 6 fr.

Tome VI. — Onzième période : *De Newton à Euler* (suite); 1885. 6 fr.

Tome VII. — Onzième période : *De Newton à Euler* (suite); 1885. 6 fr.

Tome VIII. — Onzième période : *De Newton à Euler* (fin). — Douzième période : *D'Euler à Lagrange;* 1886..... 6 fr.

Tome IX. — Douzième période : *D'Euler à Lagrange* (fin). — Treizième période : *De Lagrange à Laplace;* 1886..... 6 fr.

Tome X. — Treizième période : *De Lagrange à Laplace* (fin). — Quatorzième période : *De Laplace à Fourier;* 1887..... 6 fr.

Tome XI. — Quinzième période : *De Fourier à Arago;* 1887... 6 fr.

Tome XII. — Seizième période : *D'Arago à Abel et aux Géomètres contemporains;* 1888..... 6 fr.

16590 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BINDING SECT.
MAR 29 1973

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

QA
482
M37

Marie, Maximilien
Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie

P&ASci